

سلسلة ملخصات  
الكتاب

# الدوائر الكهربائية

الجزء الأول  
الطبعة الأولى العربية  
2001

محمود ناهشي

تأليف: جوزيف آدمستتر

يشمل الأساسيات الموجودة في المناهج والمراجع.

يعلم الطرق الفعالة لحل المسائل.

يحتوي على الكثير من المسائل المحلولة حلاً كاملاً.

سلسلة شوم بيعت  
منها أكثر من 30  
مليون نسخة في  
العالم

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية



سلسلة ملخصات شوم

فى

# الدوائر الكهربائية

الجزء الأول

تأليف

جوزيف آدمستر

محمود ناهقى

مراجعة

د/ السيد حسن شهاب

أستاذ بكلية الهندسة جامعة حلوان

ترجمة

د/ محمد جمال الدين محمد عبد الخالق

أستاذ متفرغ بكلية الهندسة جامعة حلوان

## حقوق النشر

\* الطبعة الانجليزية حقوق التأليف © 1989 دار ماكجروهيل للنشر . جميع الحقوق محفوظة

### Electronic Devices and Circuits

by

Joseph Edminster

Mahmood Nahvi

\* الطبعة العربية الأولى حقوق الطبع والنشر © 2001 ، جميع الحقوق محفوظة

### الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العرابي - النهضة الجديدة - مصر الجديدة - القاهرة - ج. م. ع.

ص. ب: 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة - تليفون: 2957655/2972344 فاكس : 2957655 (00202)

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب

أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى وجه أو بأى طريقة سواء كانت اليكترونية أو ميكانيكية  
أو بالتصوير أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدمات

رقم الايداع : 2001/3211

I.S.B.N: 977-282-098-6

## مقدمة الكتاب

وضع هذا الكتاب كنسخة منقحة ومزينة من الكتاب الذى تم نشره سابقاً بنفس العنوان. وقد روعى فيه إعادة التشكيل ليكون أكثر سهولة وإيضاحاً. وأضيفت إليه عدة فصول جديدة وهى الفصل الرابع بعنوان طرق التحليل، وبه الطرق المختلفة لتحليل الشبكات الكهربية باستخدام طرق التحليل والمحددات والمصفوفات، والفصل الحادى عشر بعنوان الدوائر المتعددة الأوجه وبه تم التعرف على أنواع الدوائر المختلفة مع شرح وافٍ للنظم ثلاثية الأوجه المتزنة وغير المتزنة، والفصل الثانى عشر وهو الاستجابة الترددية والمرشحات والرنين وبه تم شرح الاستجابة الترددية ودراسة الشبكات المختلفة ذات الإمرار العالى والمنخفض ودوال الشبكات والمرشحات المثالية والعملية وغير ذلك من دوائر الرنين.

هذا وقد تم تغيير جزئى فى بعض الفصول الأخرى من ناحية المادة العلمية لتكون أكثر إيضاحاً، فقد أضيف إلى الفصل الثالث عشر جزء جديد للتعرف على الأطراف والمداخل للشبكات ذات المدخلين وأيضاً معاملات الثابت  $Z$  والثابت  $Y$  ومكافئ  $T$  للشبكة المعكوسة. هذا وقد تم ترتيب أرقام المعادلات والأشكال فى الفصل الأول والثانى والثالث والرابع وأضيفت أيضاً مجموعة من المسائل المحولة والجديدة على مدار الكتاب كله حتى يتم الفهم الكامل لفصوله المختلفة.

هذا وقد صدر الكتاب فى جزئين:

**\* الجزء الأول** يحتوى على الفصول من الفصل الأول إلى الفصل التاسع.

**\* والجزء الثانى** من الفصل العاشر إلى الفصل السابع عشر، كما يحتوى كل جزء على ملحق للكتاب به ثلاثة أقسام.

د. جمال عبد الخالق



# المحتويات

## الفصل

## صفحة

9	<b>الفصل الأول : مقدمة</b>
9	1-1 الكميات الكهربائية ووحدات (SI) -----
11	1-2 القوة والشغل والقدرة -----
12	1-3 الشحنة الكهربائية والتيار -----
14	1-4 الجهد الكهربى -----
14	1-5 الطاقة والقدرة الكهربائية -----
19	<b>الفصل الثانى : مفهوم الدائرة</b>
19	2-1 العناصر الغير فعالة والفعالة -----
20	2-2 إصطلاحات الإشارات -----
22	2-3 علاقات الجهد والتيار -----
23	2-4 المقاومة -----
24	2-5 الحث -----
25	2-6 السعة -----
26	2-7 أشكال الدائرة -----
37	<b>الفصل الثالث : قوانين الدائرة</b>
37	3-1 مقدمة -----
37	3-2 قانون كيرشوف للجهد -----
38	3-3 قانون كيرشوف للتيار -----
39	3-4 توصيل عناصر الدائرة على التوالى -----
41	3-5 توصيل عناصر الدائرة على التوازى -----
43	3-6 تقسيم الجهد -----
44	3-7 تقسيم التيار -----
51	<b>الفصل الرابع : طرق التحليل</b>
51	4-1 طريقة تيار الفرع -----
52	4-2 طريقة تيار الشبكة ( الحلقة ) -----
53	4-3 المصفوفات والمحددات -----
53	4-4 طريقة جهد العقدة -----
56	4-5 المقاومة الداخلة -----
58	4-6 مقاومة الإنتقال -----
58	4-7 تبسيط الشبكات -----
59	4-8 التراكب ( التجمع ) -----
61	4-9 نظريتي ثيغينز ونورتون -----
63	4-10 نظرية القدرة القصوى المنقولة -----

## 83 الفصل الخامس : دوائر المكبرات ومكبرات التشغيل

83	5-1 تمثيل المكبر
85	5-2 التغذية الخلفية في دوائر المكبرات
86	5-3 مكبر التشغيل
91	5-4 تحليل الدوائر المحتوية على مكبر تشغيل مثالي
93	5-5 دوائر المكبر العاكس
93	5-6 دوائر المكبر الجامع
95	5-7 دوائر المكبر الغير عاكس
97	5-8 تابع الجهد
98	5-9 المكبرات التفاضلية والفرقية
100	5-10 الدوائر المحتوية على عدد من مكبرات التشغيل
102	5-11 دوائر التكامل والتفاضل
106	5-12 الحاسبات التناظرية

## 137 الفصل الخامس : الإشارات والأشكال الموجية

137	6-1 مقدمة
137	6-2 الدوال الدورية
139	6-3 الدوال الجيبية
140	6-4 الإزاحة الزمنية وإزاحة الوجه
143	6-5 الدوال الدورية المركبة
145	6-6 القيم المتوسطة والقيم الفعالة (RMS)
148	6-7 الدوال الغير دورية
148	6-8 دالة الوحدة السلمية
150	6-9 دالة الوحدة الدفعية
153	6-10 الدالة الأسية
156	6-11 الدوال الجيبية المخمدة
157	6-12 الإشارة العشوائية

## 167 الفصل السابع : دوائر الرتبة الأولى

167	7-1 مقدمة
167	7-2 تفريغ المكثف في المقاومة
178	7-3 تكوين جهد التيار المستمر على طرفي المكثف
180	7-4 دائرة RL خالية المنبع
182	7-5 بناء تيار مستمر في الملف
183	7-6 الدالة الأسية المسترجعة
185	7-7 دوائر RL , RC المعقدة ذات الرتبة الأولى
188	7-8 حالات الاستقرار لدوائر التيار المستمر مع الملفات والمكثفات



189	7-9 الحالات الإنتقالية عند حدوث الفصل والتوصيل
192	7-10 إستجابة دوائر الرتبة الأولى مع النبضة
194	7-11 الإستجابة الدفعية لدوائر $RL, RC$
196	7-12 ملخص إستجابات النبضة والدفعة في دوائر $RL, RC$
196	7-13 إستجابة دوائر $RL, RC$ للتغذية الأسية المفاجئة
198	7-14 إستجابة دوائر $RL, RC$ للتغذية الجيبية المفاجئة
199	7-15 ملخص الإستجابة القسرية في دوائر الرتبة الأولى
221	<b>الفصل الثامن : دوائر فوق الدرجة الأولى والترددات المركبة</b>
221	8-1 مقدمة
221	8-2 دائرة التوالي $R L C$
226	8-3 دائرة التوازي $R L C$
230	8-4 دوائر ذات الشبيكتين
231	8-5 التردد المركب
233	8-6 المعاوقة العامة $(R, L, C)$ في مجال $S$
234	8-7 دالة الشبكة ورسوميات قطب/ صفر
237	8-8 الإستجابة القسرية
238	8-9 الإستجابة الطبيعية
240	8-10 مقياس القيمة والتردد
259	<b>الفصل التاسع : تحليل الدوائر الجيبية المستقرة</b>
259	9-1 مقدمة
259	9-2 إستجابات العنصر
263	9-3 المتجهات
266	9-4 المعاوقة والسماحية
269	9-5 تقسيم الجهد والتيار في مجال التردد
270	9-6 طريقة تيار الشبيكة
273	9-7 طريقة جهد العقدة
274	9-8 نظريتي ثيفينن ونورتون
295	<b>ملحق A : نظام الأعداد المركبة</b>
295	A 1 الأعداد المركبة
295	A 2 المستوى المركب
295	A 3 المعامل المتجه $j$
295	A 4 التمثيلات الأخرى للأعداد المركبة
296	A 5 جمع وطرح الأعداد المركبة
296	A 6 ضرب الأعداد المركبة

297	A 7 قسمة الأعداد المركبة
297	A 8 مرافق العدد المركب
299	<b>ملحق B : المصفوفات والمحددات</b>
299	B 1 المعادلات الآتية ومصفوفات الخواص
299	B 2 أنواع المصفوفات
301	B 3 حسابات المصفوفات
302	B 4 محدد المصفوفة المربعة
305	B 5 القيم الجذرية للمصفوفات المربعة
307	<b>ملحق C : أمثلة توضيحية من معلم شاوم الإلكتروني</b>

## الفصل الأول

### تقديم

#### 1.1 الكميات الكهربائية ووحدات (SI)

تستخدم وحدات النظام الدولي (SI) خلال هذا الكتاب. والجدول 1-1 يوضح أربعة من الكميات الأساسية ووحدات النظام الدولي المترى (SI) المناظرة لها والكميات والوحدات الرئيسية الثلاثة الأخرى ووحدات (SI) المناظرة لها والغير موجودة في الجدول هي درجة الحرارة بدرجات كلفن (K) وكمية المادة بالمُل (Mol) وشدة الاستضاءة بالكاندل (cd).

جدول 1-1

الكمية	الرمز العام	الوحدة SI	الرمز الدال علي الوحدة
الطول	L, l	متر	m
الكتلة	M, m	كيلو جرام	kg
الزمن	T, t	ثانية	s
التيار	I, i	أمبير	A

وتستجج الوحدات الأخرى من الوحدات الأساسية السبعة. والكميات الكهربائية ورموزها والمستخدمه عادة في تحليل الدوائر الكهربائية موضحة بالجدول 1-2.

## جدول 1-2

الكمية	الرمز العام	الوحدة SI	الرمز الدال على الوحدة
الشحنة الكهربائية	Q, q	كولوم	C
الجهد الكهربى	V, v	فولت	V
المقاومة	R	أوم	$\Omega$
التوصيلية	G	سيمنز	S
الحث	L	هنرى	H
السعة	C	فاراد	F
التردد	f	هيرتز	Hz
القوة	F, f	نيوتن	N
الطاقة، الشغل	W, w	جول	J
القدرة	P, p	وات	W
الفيض المغناطيسى	$\phi$	ويبر	Wb
كثافة الفيض المغناطيسى	B	تسلا	T

وتوجد كميتان إضافيتان هما الزاوية المستوية (ويطلق عليها اسم زاوية الوجه عند تحليل الدوائر الكهربائية) والزاوية المجسمة ووحدات (SI) المناظرة لها هما راديان (rad) وستراديان (sr).

وغالباً تستخدم الدرجات للتعبير عن زوايا الوجه في الدوال الجيبية مثل  $(\sin \omega t + 30^\circ)$  حيث تكون  $\omega t$  بالراديان وفي هذه الحالة تكون الوحدات مركبة.

ويستخدم المضروب أو المقسوم العشرى لوحدات SI كلما كان ممكناً والرموز المستخدمة في جدول 1-3 هي قيم المضروب الذى يسبق رموز الوحدات في جدول 1-1، جدول 1-2 ومثال ذلك mV تستخدم للمللى فولت  $10^{-3}$  V كما يستخدم MW للقيمة  $10^{-6}$  W.

### جدول 1-3

الرمز	قيمة المعامل	معامل التصغير أو التكبير
P	$10^{-12}$	بيكو
n	$10^{-9}$	نانو
$\mu$	$10^{-6}$	ميكرو
m	$10^{-3}$	مللي
c	$10^{-2}$	سنتي
k	$10^3$	كيلو
M	$10^6$	ميجا
G	$10^9$	جيجا
T	$10^{12}$	تيرا

## 1.2 القوة والشغل والقدرة

تتبع الوحدات المستنتجة العلاقات الرياضية التي تحكم الكميات الخاصة بها فمن العلاقة «القوة تساوي الكتلة مضروباً في العجلة». نجد أن الرمز (N) نيوتن يعرف بالقوة الغير متزنة التي تنتج عجلة مقدرة بواحد متر لكل مربع الثانية لكتلة قيمتها واحد كيلو جرام وبالتالي تكون العلاقة :

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

ويكون الشغل ناشئاً من استخدام القوة لمسافة. ووحدة الشغل وهي «الجول تكون مكافئة لنيوتن متر أي أن  $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ . والشغل والطاقة لها نفس الوحدات.

والقدرة هي فعول الشغل أو المعدل الذي تتغير فيه الطاقة من شكل لآخر ووحدة القدرة هي «الوات» (W) وهي جول لكل ثانية (J/s).

مثال 1-1: لحركة خطية بسيطة لكتلة قيمتها 10kg كانت العجلة الثابتة  $2.0 \text{ m/s}^2$ .

(أ) أوجد القوة  $F$ .

(ب) إذا كان الجسم فى حالة السكون عند  $t = 0$  ،  $x = 0$  أوجد المسافة وطاقة الحركة والقدرة عند  $t = 4 \text{ s}$ .

$$(a) \quad F = ma = (10 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s}^2) = 20.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 20.0 \text{ N}$$

$$(b) \quad \text{At } t = 4 \text{ s}, \quad x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(2.0 \text{ m/s}^2)(4 \text{ s})^2 = 16.0 \text{ m}$$
$$KE = Fx = (20.0 \text{ N})(16.0 \text{ m}) = 3200 \text{ N} \cdot \text{m} = 3.2 \text{ kJ}$$
$$P = KE/t = 3.2 \text{ kJ}/4 \text{ s} = 0.8 \text{ kJ/s} = 0.8 \text{ kW}$$

### 1.3 الشحنة الكهربائية والتيار :

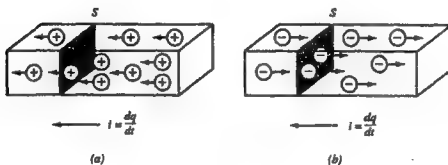
تُعرف وحدة التيار وهى الأمبير (A) بالتيار الثابت المار خلال موصلين متوازيين طويلين جداً وقطاع كل منهما صغير جداً والمسافة بينهما هى متر واحد موجودان فى الفراغ حيث ينتج بينهما قوة تساوى  $2.0 \times 10^{-7}$  نيوتن لكل متر من الطول. كما يوجد مفهوم آخر أكثر فائدة للأمبير وهو التيار الناشئ من حركة الشحنات وهذه الشحنات هى واحد كولوم من الشحنة تتحرك خلال سطح معين فى الثانية الواحدة. وعند كتابة ذلك كدالة فى الزمن يكون  $(A) = dq/dt$  (C/s) وبذلك تكون وحدة الشحنة المستنتجة وهى الكولوم (C) مساوية للقيمة أمبير-ثانية.

والشحنات المتحركة قد تكون موجبة أو سالبة. والأيونات الموجبة المتحركة ليسار فرضاً فى وسط سائل شكل 1-1 (a) ينشأ عنها تياراً متجهاً أيضاً ليسار فإذا اختزقت هذه الأيونات السطح S بسرعة كولوم واحد لكل ثانية فإن التيار الناشئ هو واحد أمبير. وينتج عن الأيونات السالبة المتحركة إلى اليمين أيضاً تياراً متحركاً يساراً.

ويعتبر التيار المار فى الموصلات المعدنية والذى يحدث من خلال الإلكترونات التى تشغل المدار الخارجى للتركيب الذرى ذو أهمية كبرى فى تحليل الدوائر الكهربائية. ففى النحاس مثلاً يكون إلكترون واحد فى المدار الخارجى ذو إنجذاب ضعيف للنواة التى فى الوسط وبذلك يتحرك بحرية من

ذرة إلى أخرى داخل التركيب البلورى للذرات . وفى درجات الحرارة العادية تكون هناك حركة ثابتة عشوائية لهذه الإلكترونات . ويتحرك بحرية فى المكعب الواحد من النحاس ما يقرب  $8.5 \times 10^{28}$  إلكترون توصيل وهذا ما يعطى فكرة عن إمكانية التوصيل للنحاس .

وشحنة الإلكترون هي  $e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$  . وبذلك فإن تيار قيمته واحد أمبير يتسبب فى مرور ما يقرب من  $6.24 \times 10^{18}$  إلكترون كل ثانية خلال قطاع الموصل .



شكل 1-1

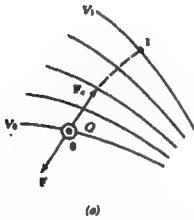
مثال 1-2: موصل يمر به تيار ثابت قيمته خمسة أمبير كم إلكترون يمر على نقطة ثابتة فى هذا الموصل فى دقيقة واحدة .

$$5 \text{ A} = (5 \text{ C/s})(60 \text{ s/min}) = 300 \text{ C/min}$$

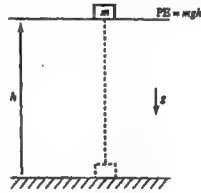
$$\frac{300 \text{ C/min}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C/electron}} = 1.87 \times 10^{21} \text{ electrons/min}$$

## 1.4 الجهد الكهربى :

ينشأ عن الشحنة الكهربائية قوة فى المجال الكهربى بحيث إذا لم تقاوم ستؤدى إلى تعجيل حركة الجزيئات الحاملة للشحنة . والمهم هنا هو الشغل اللازم لتحريك الشحنة ضد المجال كما هو موضح بشكل 1-2 (a) ولذلك إذا كان المطلوب شغل قدره واحد جول لتحريك الشحنة  $Q$  (واحد كولوم) من الوضع 0 إلى الوضع 1 . فإن الوضع 1 يكون ذو جهد (واحد فولت) بالنسبة للوضع 0 ،  $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$  . ويكون هذا الجهد الكهربى قادراً على إحداث شغل تماماً مثل الشغل المبذول على الكتلة فى شكل 1-2 (b) والتي رفعت ضد قوة الجاذبية الأرضية  $g$  للمسافة  $h$  فوق سطح الأرض . وطاقة الوضع  $mgh$  تمثل القابلية لبذل الشغل حينما تُترك الكتلة  $m$  . وإذا ما بدأت الكتلة فى السقوط فإنها تبدأ بعملية تزايدية وتتحول طاقة الوضع هذه إلى طاقة حركة .



(a)



(b)

شكل 1-2

**مثال 1-3 :** فى دائرة كهربية المطلوب نقل  $0.5 \mu\text{C}$  من نقطة أ إلى نقطة ب عن طريق طاقة قيمتها  $9.25$  لىل فما هو الجهد الكهربى الناشئ بين النقطتين ؟

$$\text{one volt} = \text{one joule per coulomb}$$

$$V = \frac{9.25 \times 10^{-6} \text{ J}}{0.5 \times 10^{-6} \text{ C}} = 18.5 \text{ V}$$

## 1.5 الطاقة والقدرة الكهربائية :

سنتناول فى الفصول التالية الطاقة الكهربائية بالجول والتي تتعامل مع السعة والحث . والمجالات الكهربائية والمغناطيسية لها ذات القدرة على تخزين الطاقة . ومعدل تحويل الطاقة بالجول لكل ثانية هو القدرة الكهربائية بالواط وعلى ذلك يؤدى حاصل ضرب الجهد فى التيار إلى القدرة الكهربائية



$1 \text{ W} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A}$ ،  $P = v i$ ، وأيضاً  $J/s = W$ ،  $(c/s) = J/s = W$ ،  $V \cdot A = (J/C)$ ، ويمكن القول أيضاً أن القدرة هي المعامل التفاضلى للطاقة  $P = dw / dt$ ، وبذلك تكون القدرة اللحظية عادة دالة فى الزمن. وفى الفصول التالية يؤخذ متوسط القدرة خلال فترة زمنية  $P_{avg}$  وأيضاً ستؤخذ القيمة المتوسطة الفعالة وهو جذر متوسط المربعات (RMS) وذلك عند اعتبار القيم الجيبية للجهد والتيار.

**مثال 1-4:** إذا كان فرق الجهد بين طرفى مقاومة هو  $50.0 \text{ V}$  ومرت شحنة قيمتها  $120.0 \text{ C}$  على نقطة معينة كل دقيقة. فاحسب بأي معدل تتحول هذه الطاقة إلى حرارة.

$$P = (2.0 \text{ A}) (50.0 \text{ V}) = 100.0 \text{ W} \quad (120.0 \text{ C/min}) / (60 \text{ s/min}) = 2.0 \text{ A}$$

حيث  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ ، فإن معدل تغير تحول الطاقة هو مائة جول لكل ثانية.

## 1.6 الدوال الثابتة والمتغيرة

للتمييز بين الكميات الثابتة والكميات المرتبطة بالزمن فإنه يرمز بالحروف الكبيرة للكميات الثابتة وبالحروف الصغيرة لتلك المرتبطة بالزمن. ومثال ذلك أنه تيار ثابت قيمته عشرة أمبير يكتب هكذا  $I = 10.0 \text{ A}$ ، بينما يكون العشرة أمبير المرتبطة بالزمن هكذا  $i = 10.0 \text{ A}$ ، والدوال المعتادة فى تحليل الدوائر تكون دوال جيبية  $i = 10.0 \sin \omega t \text{ (A)}$  والدالة الزائدية هي  $v = 15.0e^{-at} \text{ (V)}$ .

## مسائل محلولة

1-1 أثرت قوة متغيرة طبقاً للعلاقة  $F = 12/x^2 \text{ (N)}$  على نقطة فى اتجاه  $x$ .

(أ) أوجد الشغل المبذول فى المسافة  $1 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$ .

(ب) ما هى القوة الثابتة المؤثرة لنفس المسافة والتى ينشأ عنها نفس الشغل.

$$dW = F dx \quad \text{so} \quad W = \int_1^3 \frac{12}{x^2} dx = 12 \left[ \frac{-1}{x} \right]_1^3 = 8 \text{ J}$$

$$8 \text{ J} = F_c(2 \text{ m}) \quad \text{or} \quad F_c = 4 \text{ N}$$

1-2 تحولت طاقة كهربية إلى طاقة حرارية بمعدل 7.56 kJ/min في مقاومة يمر خلالها شحنة 270 C/min. ما هو فرق الجهد الكهربى على طرف المقاومة .

من العلاقة  $P = VI$

$$V = \frac{P}{I} = \frac{7.56 \times 10^3 \text{ J/min}}{270 \text{ C/min}} = 28 \text{ J/C} = 28 \text{ V}$$

1-3 فى أحد عناصر دائرة كهربية كان التيار  $i = 2.5 \sin \omega t$  (mA) حيث  $\omega$  هو التردد مقاس بوحدات rad/s وكان فرق الجهد على طرفيه  $v = 45 \sin \omega t$  (V). أوجد متوسط القدرة  $P_{avg}$  والطاقة المحولة فى دورة واحدة من الدالة الجيبية .  
الطاقة هى تكامل القدرة اللحظية بالنسبة للزمن .

$$W_T = \int_0^{2\pi/\omega} v i dt = 112.5 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \frac{112.5}{\omega} \pi \text{ (mJ)}$$

وبذلك تكون متوسط القدرة :

$$P_{avg} = \frac{W_T}{2\pi/\omega} = 56.25 \text{ mW}$$

لاحظ أن  $P_{avg}$  غير مرتبطة بقيمة  $\omega$  .

1-4 الوحدة المستخدمة عادة للطاقة بالنسبة لشركات توزيع الكهرباء هى الكيلو واط ساعة (kWh) .  
(أ) كم جولاً فى 1 kWh . (ب) إذا كان أحد التلفزيونات الملونة ذو القدرة 75 W يعمل من الساعة مساءً حتى الحادية عشرة والنصف مساءً فما هى الطاقة الكلية التى يمثلها هذا الأداء بالكيلو واط ساعة وأيضاً بالميجا جول .

$$(a) \quad 1 \text{ kWh} = (1000 \text{ J/s}) (3600 \text{ s/h}) = 3.6 \text{ MJ}$$

$$(b) \quad (75.0 \text{ W}) (4.5 \text{ h}) = 337.5 \text{ Wh} = 0.3375 \text{ kWh}$$

$$(0.3375 \text{ kWh}) (3.6 \text{ MJ/kWh}) = 1.215 \text{ MJ}$$

1-5 سلك نحاسى # 12 AWG (من النوع شائع الاستخدام فى التوصيلات) يحتوى هذا المقاس على  $2.77 \times 10^{23}$  إلكترون حر لكل متر من طول السلك وذلك باعتبار وجود إلكترون واحد حر للتوصيل بكل ذرة . فما هى النسبة المئوية للإلكترونات التى تمر خلال مقطع معين إذا كان التيار الثابت المار بالموصل هو 23.0 A .

$$\frac{25.0 \text{ C/s}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C/electron}} = 1.56 \times 10^{20} \text{ electron/s}$$

$$(1.56 \times 10^{20} \text{ electrons/s})(60 \text{ s/min}) = 9.36 \times 10^{21} \text{ electrons/min}$$

$$\frac{9.36 \times 10^{21}}{2.77 \times 10^{23}} (100) = 3.38\%$$

1-6 كم عدد الإلكترونات التى تمر خلال نقطة بالنسبة لمصباح كهربى قدرته 100 W خلال ساعة إذا كان الجهد الثابت هو 120 V .

$$100 \text{ W} = (120 \text{ V}) \times I(\text{A}) \quad I = 5/6 \text{ A}$$

$$\frac{(5/6 \text{ C/s})(3600 \text{ s/h})}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C/electron}} = 1.87 \times 10^{22} \text{ electrons per hour}$$

1-7 تقاس البطاريات المعتادة للسيارات (12.0V) طبقاً لقيمة الأمبير ساعة . فإذا كان تيار التفريغ لبطارية 70-A.h هو 3.5 A خلال فترة 20 h . (أ) باعتبار أن الجهد يبقى ثابت القيمة . أوجد الطاقة والقدرة المعطاة خلال فترة التفريغ لهذه البطارية . (ب) كرر السابق لمعدل تفريغ 7.0 A .

$$(a) (3.5 \text{ A}) (12 \text{ V}) = 42.0 \text{ W (or J/s)}$$

$$(42.0 \text{ J/s}) (3600 \text{ s/h}) (20 \text{ h}) = 3.02 \text{ MJ}$$

$$(b) (7.0 \text{ A}) (12 \text{ V}) = 84.0 \text{ W}$$

$$(84.0 \text{ J/s}) (3600 \text{ s/h}) (10 \text{ h}) = 3.02 \text{ MJ}$$

ومقنن الأمبير ساعة هو قيمة الطاقة المخزنة بالبطارية وبالتالي هو الطاقة التى يتم تفريغها كلياً وهى قيمة ثابتة سواء تم التفريغ فى عشر ساعات أو عشرين ساعة . وحيث أن القدرة هى معدل تحويل الطاقة فإن القدرة خلال عشر ساعات تفريغ تكون ضعف القدرة خلال عشرين ساعة تفريغ .



## الفصل الثانى

### مفهوم الدائرة

#### 2.1 العناصر الغير فعالة والفعالة :

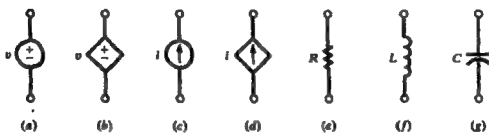
تمثل النيةطة الكهربائية فى الدائرة أو الشبكة الكهربائية بعنصر أو أكثر متصلة على التوالى أو التوازى ولكل عنصر طرفان . وتحليل شكل الدائرة فإنه يمكن معرفة حقيقة أداء كل نيةطة فيها . والشكل العام لعنصر ذو طرفين مبين بشكل 1-2 كنيةطة واحدة ممثلة برمز على شكل مستطيل وطرفين متصلين بها عند الطرفين A ، B والعناصر الفعالة هى منابع الجهد أو التيار والتي تكون قادرة على إمداد الطاقة للشبكة . بينما تكون المقاومات والملفات والمكثفات عناصر غير فعالة تأخذ الطاقة من منابع وهى إما أن تحولها إلى شكل آخر من أشكال الطاقة أو تختزنها كمجال كهبرى أو مغناطيسى .



شكل 1-2

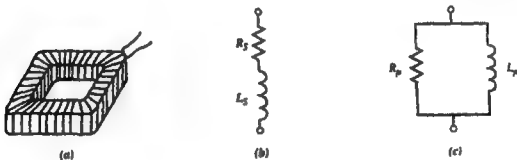
ويبين شكل 2-2 سبع عناصر أساسية فى الدائرة . فالعنصران (a) ، (b) هما منبعان للجهد والعنصران (c) ، (d) هما منبعان للتيار . ومنبع الجهد الذى لا يتأثر بالتغيير فى الدائرة المتصل بها يسمى منبع مطلق وهو ممثل بدائرة فى شكل 2-2 (a) وجهد المنبع التابع والذى يتغير بطريقة أو بأخرى حسب ظروف الدائرة المتصل بها يرمز له بمعين شكل 2-2 (b) . و منابع التيار يمكن هى الأخرى أن

تكون مطلقة أو تابعة والرموز المناظرة لها هي المبينة في شكل (c)، شكل (d) والعناصر الغير فعالة  
الباقية هي المبينة في أشكال (e)، (f)، (g) شكل 2-2.



شكل 2-2

وأشكال الدوائر المبينة هنا يطلق عليها دوائر ذات عناصر مجمعة حيث يستخدم العنصر الواحد في أحد المواضع ليمثل مقاومة أو حث أو سعة يكون موزعاً خلال العنصر . ومثال ذلك للملف المحتوى على عدد كبير من اللفات من سلك معزول تكون له مقاومة موزعة خلال الطول الكلى للسلك . ومع هذا فإنها تمثل بمقاومة مجمعة كما في شكل 2-3 (b) أو (c). وبالمثل فإن حث الملف يجمع في مكان واحد على التوالي أو على التوازي مع المقاومة شكل 2-3 (c). وعلى العموم فإنه يمكن تمثيل الملف بدائرة توالى أو توازى وربما يُفضل بالنسبة لتردد جهد المنبع اختيار أحد الطريقتين لتمثيل النيةطة .

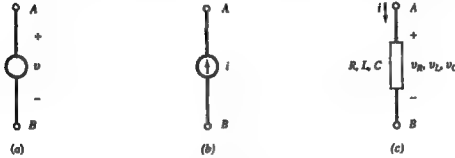


شكل 2-3

## 2.2 اصطلاحات الإشارات :

لا بد لتمثيل منبع الجهد تمثيلاً كاملاً من وجود دالة الجهد وتحديد القطبية وتوضع الإشارة + والإشارة - بجوار مكان توصيل منبع الجهد عند طرفيه . فإذا كان الجهد مثلاً  $10.0 \sin \omega t$  كما

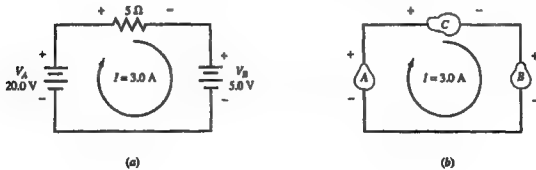
فى شكل 2-4 (a) فإن الطرف A يكون موجباً بالنسبة للطرف B للقيم  $0 < \omega t < \pi$  والطرف B يكون موجباً بالنسبة للطرف A للقيم  $\pi < \omega t < 2\pi$  للمنحنى الجيبى للدالة لأول ذبذبة .



شكل 2-4

وبالمثل فإن منبع التيار يحتاج لتحديد إتجاهه كما يحدد دالته كما فى شكل 2-4 (b) وبالنسبة للعناصر الغير فعالة  $R, L, C$  المبينة شكل 2-4 (c). فإن الطرف الذى يدخل فيه التيار يعامل على أساس أنه موجب بالنسبة للطرف الذى يخرج منه التيار .

وإشارة القدرة مبينة بدائرة تيار مستمر شكل 2-5 (a) ذات جهود ثابتة للمنبع  $V_A = 20.0 \text{ V}$  ،  $V_B = 5.0 \text{ V}$  ، ومقاومة واحد  $5\text{-}\Omega$  وبذلك يكون التيار فى اتجاه عقرب الساعة وقيمه  $3.0 \text{ A}$  . والآن باعتبار شكل 2-5 (b) فإن القدرة تستهلك فى العنصر حينما يمر التيار فى العنصر من الطرف الموجب وتحسب القدرة بالعلاقة  $VI$  أو  $I^2R$  ، التى تستهلك حيثذ فى كل من المقاومة والمنبع  $V_B$  بالقيمين  $45.0 \text{ W}$  ،  $15 \text{ W}$  على التوالى ويعتبر المنبع  $V_A$  هو منبع القدرة للدائرة نظراً لأن التيار يدخل خلاله من الطرف السالب له والقدرة بالنسبة لهذا المنبع هى  $P = VI = 60.0 \text{ W}$  تؤكد أن القدرة المستهلكة فى المقاومة والمنبع  $V_B$  هى التى يوفرها المنبع  $V_A$  .

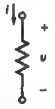

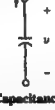


شكل 2-5

### 2.3 علاقات الجهد والتيار :

تعرف العناصر الغير فعالة وهي المقاومة  $R$ ، والحث  $L$  والسعة  $C$  بعلاقة الجهد والتيار الخاصة بكل عنصر على حدة وعلى سبيل المثال : إذا كان الجهد والتيار لعنصر ما مرتبطين بقيم ثابتة فيكون العنصر مقاومة  $R$  وتكون  $R$  هي ثابت التناسب بين الجهد والتيار  $v = Ri$  وبالمثل إذا كان الجهد هو معامل تفاضلي للتيار فيكون العنصر حثاً . وتكون  $L$  هي معامل التناسب .  $v = L di/dt$  وأخيراً إذا كان التيار في العنصر معامل تفاضلي للجهد فيكون العنصر سعة  $C$  وهي معامل التناسب  $i = C dv/dt$  والجدول 1-2 يلخص هذه العلاقات للثلاث عناصر الغير فعالة لاحظ إتجاهات التيار وإشارات الجهد . باعتبار المقاومة هي Resistanc ، الحث Inductance والسعة هي Capacitance .

جدول 2-1

Circuit element	Units	Voltage	Current	Power
 Resistance	ohms ( $\Omega$ )	$v = Ri$ (Ohm's law)	$i = \frac{v}{R}$	$p = vi = i^2 R$
 Inductance	henries (H)	$v = L \frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int v dt + k_1$	$p = vi = Li \frac{di}{dt}$
 Capacitance	farads (F)	$v = \frac{1}{C} \int i dt + k_2$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$p = vi = Cv \frac{dv}{dt}$



## 2.4 المقاومة

جميع النماط الكهربائية التي تستهلك الطاقة يجب أن تحتوي على مقاوم (تسمى أحياناً مقاومة) في تركيبة الدائرة بينما يختزن الملف المكثف الطاقة فإنها ترجع هذه الطاقة مع الوقت إلى المتبوع أو إلى أى عنصر آخر في الدائرة وتكون القدرة في المقاوم  $p = vi = i^2 R = v^2 / R$  موجبة دائماً . كما هو مبين في مثال 2-1 التالي وتكون الطاقة بذلك هي تكامل القدرة اللحظية .

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2 \, dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2 \, dt$$

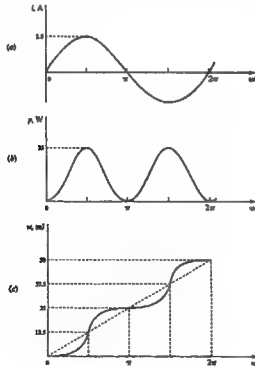
مثال 2-1: مقاومة قيمتها  $4.5 \, \Omega$  يمر فيها التيار  $i = 2.5 \sin \omega t$  (A) . أوجد الجهد والقدرة والطاقة خلال دورة واحدة  $\omega = 500 \pi$  rad/s .

$$v = Ri = 10.0 \sin \omega t \text{ (V)}$$

$$p = vi = i^2 R = 25.0 \sin^2 \omega t \text{ (W)}$$

$$w = \int_0^T p \, dt = 25.0 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right] \text{ (J)}$$

أشكال التيار  $i$  والقدرة  $p$  والطاقة  $w$  مبينه في شكل 2-6 وفيها يبدو أن القدرة  $p$  دائماً موجبة وأن الطاقة  $w$  تتزايد مع الزمن وهي الطاقة المستهلكة في المقاوم .



شكل 2-6

## 2.5 الحث:

العنصر الذي يخزن الطاقة كمجال مغناطيسي يسمى ملف حثي (يطلق عليه أحياناً الحث). وتخزن الطاقة عن طريق التيار المتغير مع الزمن خلال جزء من الدورة ثم تعود إلى المنبع خلال أجزاء أخرى منها. وحينما يُفصل الملف من المنبع يتوقف المجال المغناطيسي أى أنه لا تخزن الطاقة بدون وجود المنبع والملفات في المحركات الكهربائية والمحولات. والنبائط المشابهة يمكن أن تحتوى على حث فى مكونات دوائرها حتى أنه فى الموصلات المتوازية ينشأ الحث والذي يجب أخذه فى الاعتبار مع معظم الترددات وفيما يلى علاقات القدرة والطاقة.

$$p = vi = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} Li^2 \right]$$

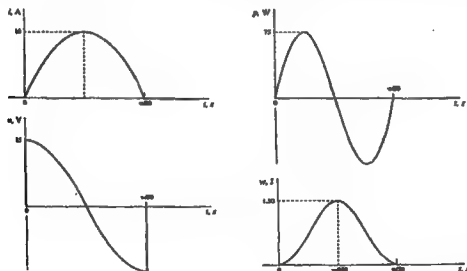
$$w_L = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} Li di = \frac{1}{2} L[i_2^2 - i_1^2]$$

الطاقة المختزنة كمجال مغناطيسي فى الحث هى  $W_L = 1/2 Li^2$ .

**مثال 2-2:** ملف له حث 30 mH يمر به تيار  $i = 10.0 \sin 50t$  (A) فى الفترة  $0 < t < (\pi/50)$  s. أوجد الجهد والقدرة والطاقة لهذا الحث.

$$v = L \frac{di}{dt} = 15.0 \cos 50t \text{ (V)} \quad p = vi = 75.0 \sin 100t \text{ (W)} \quad w_L = \int_0^t p dt = 0.75(1 - \cos 100t) \text{ (J)}$$

كما هو مبين شكل 2-7 تكون الطاقة صفراً عند  $t = 0$  وعند  $t = (\pi/50)$  s حيث أنها اختزنت فى النصف الأول من الموجة وأعيدت للمنبع فى النصف الثانى.



شكل 2-7

## 2.6 السعة :

العنصر الذى يخزن الطاقة كمجال كهربي يسمى مكثف سعوى (يسمى أحيانا سعة) فإذا كان الجهد متغيراً خلال الدورة فإن الطاقة سوف تحتزن فى جزء منها ثم تسترجع فى الجزء الثانى وبينما لا يحتفظ الحث بالطاقة بعد زوال المنيع لأن المجال المغناطيسى يزول . نجد أن السعة تحتفظ بالشحنة ويبقى المجال الكهربي بعد زوال المنيع . وهذه الحالة تبقى حتى تتاح الفرصة لتفريغ الطاقة خلال فترة زمنية . والشحنة  $q = Cv$  على المكثف تنتج مجال كهربي فى المادة العازلة التى تكون محور اختزان الطاقة وفى المكثف ذو اللوحين المتوازيين تلاحظ تراكم الشحنة على أحد اللوحين بينما تتناقص على اللوح الآخر وهذه الظاهرة (تعادل الشحنة) تحدث عند تفريغ المكثف والعلاقات الخاصة بالقدرة والطاقة كما يلى :

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} Cv^2 \right]$$

$$w_c = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{v_1}^{v_2} Cv dv = \frac{1}{2} C[v_2^2 - v_1^2]$$

وتكون الطاقة المخزنة كمجال كهربي فى المكثف هى  $W_C = 1/2 Cv^2$ .

**مثال 2-3 :** فى الفترة من  $0 < t < 5\pi \text{ ms}$  كان الجهد على طرفى مكثف  $20\text{-}\mu\text{F}$  هو  $v = 50.0 \sin 200t \text{ (V)}$  . أوجد الشحنة والقدرة والطاقة وارسم الطاقة  $W_C$  باعتبار أن  $w = 0$  عند  $t = 0$ .

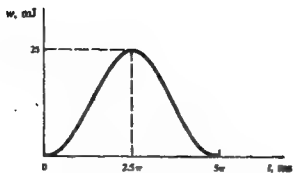
$$q = Cv = 1000 \sin 200t \text{ (}\mu\text{C)}$$

$$i = C \frac{dv}{dt} = 0.20 \cos 200t \text{ (A)}$$

$$p = vi = 5.0 \sin 400t \text{ (W)}$$

$$w_c = \int_{t_1}^{t_2} p dt = 12.5[1 - \cos 400t] \text{ (mJ)}$$

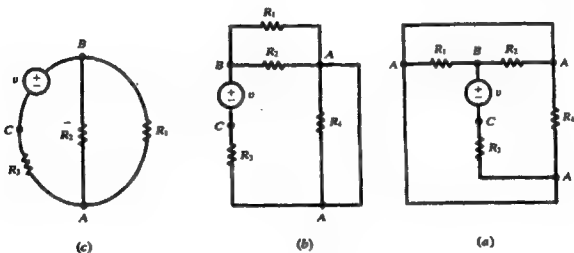
فى الفترة من  $0 < t < 2.5\pi \text{ ms}$  يتزايد الجهد والشحنة من القيمة صفر إلى القيمة  $50.0\text{ V}$  ،  $1000\text{ }\mu\text{C}$  على الترتيب . وشكل 2-8 يبين الطاقة المخزنة حيث تتزايد إلى القيمة  $25 \text{ mJ}$  ثم تتناقص إلى الصفر حيث تعود إلى المنيع .



شكل 2-8

## 2.7 أشكال الدائرة :

يمكن تمثيل شكل الدائرة بطرق مختلفة حيث تبدو متباعدة ولكنها في الحقيقة تؤدي نفس الغرض وعليه فإن شكل الدائرة في أى مسألة ربما لا يمثل أحسن طرق الحل . وعلى ذلك فإن شكل الدائرة يجب أن يفحص قبل الحل ويمكن إعادة رسمه عند الضرورة لتوضيح طريقة توصيل عناصر الدائرة بعضها بعض وأحد الأمثلة مبين في شكل 2-9 حيث رسمت ثلاث أشكال لنفس الدائرة ففي شكل 2-9 (a) يبدو أن نقاط التوصيل الثلاث المرموز لها بالرمز A رسمت كنقطتين للتوصيل في شكل (b) بينما لمجد المقاوم R4 مقصوراً ويمكن إزالته عند تحليل الدائرة وبذلك تبدو في شكل 2-9 (c) نقطة التوصيل A متصلة بالثلاث عناصر .



شكل 2-9

## مسائل محلولة

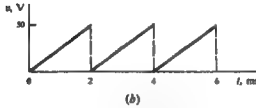
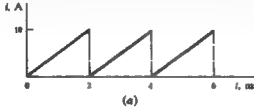
2-1 مقاوم قيمته  $25.0 \Omega$  متصل بجهد قيمته  $u = 150.0 \sin 377t$  (V). أوجد التيار المار والقدرة.

$$i = \frac{v}{R} = 6.0 \sin 377t \text{ (A)} \quad p = vi = 900.0 \sin^2 377t \text{ (W)}$$

2-2 إذا كان التيار فى مقاوم قيمته  $5\Omega$  يزداد خطياً من القيمة 0 إلى 10 A فى 2 ms وعند  $t = 2^+ \text{ ms}$

كان التيار 0 مرة أخرى. ثم ازداد خطياً للقيمة 10 A عند  $t = 4 \text{ ms}$  وهذا الشكل تكرر كل 2 ms ارسم شكل الجهد.

حيث أن  $v = Ri$  فإن القيمة العظمى للجهد يجب أن تكون  $v = 50 \text{ V}$  (10) (5). وشكل 2-10 يبين رسماً لكل من التيار والجهد ومن المؤكد حدوث التشابه بين الدالتين.



شكل 2-10

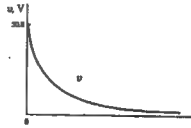
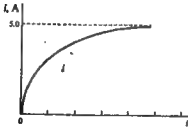
2-3 ملف حثه 2.0 mH يمر به تيار  $i = 5.0 (1 - e^{-5000t})$  (A). أوجد الجهد والقيمة العظمى للطاقة المخزنة.

$$v = L \frac{di}{dt} = 50.0 e^{-5000t} \text{ (V)}$$

شكل 2-11 يبين علاقات الجهد والتيار بالنسبة للزمن وحيث أن أقصى قيمة للتيار هى 5.0 A فإن

أقصى قيمة للطاقة هى:

$$W_{\max} = \frac{1}{2} LI^2_{\max} = 25.0 \text{ mJ}$$



شكل 2-11

2-4 ملف حثه 3.0 mH متصل بجهد يتغير مع الزمن حيث يكون في الفترة  $0 < t < 2 \text{ ms}$ ، هو 15.0 V وفي الفترة من  $2 < t < 4 \text{ ms}$  هو 30.0 V. أوجد التيار المناظر في هذه الفترات وارسم كل من  $v_L$  و  $i$  في هذه الفترة.

For  $0 < t < 2 \text{ ms}$ ,

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t v \, dt = \frac{1}{3 \times 10^{-3}} \int_0^t 15.0 \, dt = 5 \times 10^3 t \text{ (A)}$$

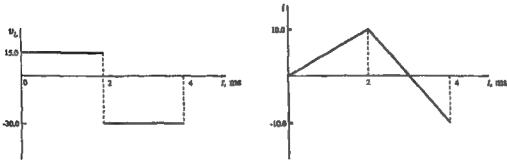
For  $t = 2 \text{ ms}$ ,

$$i = 10.0 \text{ A}$$

For  $2 < t < 4 \text{ ms}$ ,

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L} \int_{2 \times 10^{-3}}^t v \, dt + 10.0 = 10.0 + \frac{1}{3 \times 10^{-3}} \int_{2 \times 10^{-3}}^t -30.0 \, dt \\ &= 10.0 + \frac{1}{3 \times 10^{-3}} [-30.0t + (60.0 \times 10^{-3})] \text{ (A)} \\ &= 30.0 - (10 \times 10^3 t) \text{ (A)} \end{aligned}$$

انظر شكل 2-12.



شكل 2-12

2-5 مكثف سعته  $60.0 \mu\text{F}$  عليه جهد  $v = 25.0 \times 10^3 t \text{ (V)}$  في الفترة  $0 < t < 2 \text{ ms}$  ارسم شكلاً لكل من  $i$ ،  $p$ ، لهذه الفترة وأوجد أيضاً  $W_{\max}$ .

For  $0 < t < 2 \text{ ms}$ .

$$i = C \frac{dv}{dt} = 60 \times 10^{-6} \frac{d}{dt} (25.0 \times 10^3 t) = 1.5 \text{ A}$$

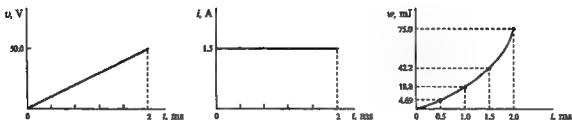
$$p = vi = 37.5 \times 10^3 t \text{ (W)}$$

$$w_C = \int_0^t p \, dt = 1.875 \times 10^4 t^2 \text{ (mJ)}$$

انظر شكل 2-13.

$$W_{\max} = (1.875 \times 10^4)(2 \times 10^{-3})^2 = 75.0 \text{ mJ}$$

or 
$$W_{\max} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} (60.0 \times 10^{-6})(50.0)^2 = 75.0 \text{ mJ}$$



شكل 2-13

2-6 شحن مكثف سعته  $20.0 \mu\text{F}$  خطياً من 0 إلى  $400 \mu\text{C}$  خلال  $5.0 \text{ ms}$  أوجد دالة الجهد وقيمته  $W_{\text{max}}$ .

$$q = \left( \frac{400 \times 10^{-6}}{5.0 \times 10^{-3}} \right) t = 8.0 \times 10^{-2} t \text{ (C)}$$

$$v = q/C = 4.0 \times 10^3 t \text{ (V)}$$

$$V_{\text{max}} = (4.0 \times 10^3)(5.0 \times 10^{-3}) = 20.0 \text{ V} \quad W_{\text{max}} = \frac{1}{2} CV_{\text{max}}^2 = 4.0 \text{ mJ}$$

2-7 مقاومة  $R = 2 \Omega$  وحث  $L = 2 \text{ mH}$ ، سعة  $C = 500 \mu\text{F}$  متصلة على التوالي يمر خلالها تياراً يزداد خطياً من zero إلى  $10 \text{ A}$  في الفترة من  $0 \leq t \leq 1 \text{ ms}$  ويستمر التيار  $10 \text{ A}$  للفترة  $1 \text{ ms} \leq t \leq 2 \text{ ms}$  ثم يتناقص خطياً من القيمة  $10 \text{ A}$  عند  $t = 2 \text{ ms}$  إلى القيمة zero عند  $t = 3 \text{ ms}$  ارسم شكل كل من  $V_C$ ،  $V_L$ ،  $V_R$ .

يجب أن يكون دالة مع الزمن مطابقة لدالة  $i$ . والجهد قيمته  $V_{\text{max}} = 2(10) = 20 \text{ V}$  للفترة  $0 < t < 1 \text{ ms}$ .

$$\frac{di}{dt} = 10 \times 10^3 \text{ A/s} \quad \text{and} \quad v_L = L \frac{di}{dt} = 20 \text{ V}$$

عند  $di/dt = 0$  للفترة  $1 \text{ ms} < t < 2 \text{ ms}$  تكون  $v_L = 0$ .  
وباعتبار أن الشحنة الابتدائية على المكثف = صفراً.

$$v_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

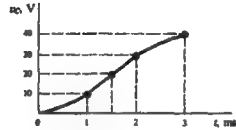
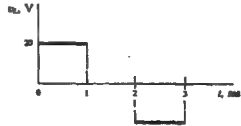
وللفترة  $0 \leq t \leq 1 \text{ ms}$ .

$$v_C = \frac{1}{5 \times 10^{-4}} \int_0^t 10^4 t dt = 10^7 t^2 \text{ (V)}$$

يصل الجهد للقيمة 10 V عند 1 ms للفترة  $1 \text{ ms} < t < 2 \text{ ms}$ .

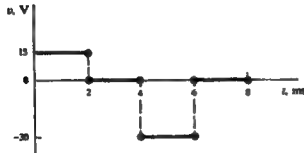
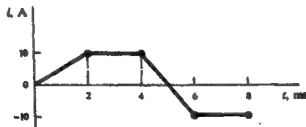
$$v_C = (20 \times 10^3) (t - 10^{-3}) + 10 \text{ (V)}$$

انظر شكل 2-14.



شكل 2-14

2-8 شكل 2-15 يبين رسماً لتغير كل من التيار والجهد كدالة مع الزمن لدائرة ذات عنصر واحد بين نوع هذا العنصر.



شكل 2-15



لا يمكن أن يكون هذا العنصر مقاومة حيث أن قيم  $v$ ،  $i$  ليست متناسبة.  $v$  هي تكامل  $i$  في الفترة  $2 \text{ ms} < t < 4 \text{ ms}$ ، بينما الجهد  $v$  يظل ثابتاً للقيمة صفر وبذلك لا يمكن أن يكون العنصر مكثف. للفترة  $0 < t < 2 \text{ ms}$ .

$$\frac{di}{dt} = 5 \times 10^3 \text{ A/s} \quad \text{and} \quad v = 15 \text{ V}$$

$$L = v / \frac{di}{dt} = 3 \text{ mH} \quad \text{وبالتالي}$$

اختبر الفترة  $4 \text{ ms} < t < 6 \text{ ms}$ . حيث  $L$  يجب أن يكون لها نفس القيمة

2-9 أوجد الجهد للتوصيلة المبينة شكل 2-16 لما يلي :

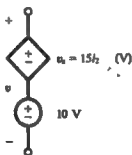
$$i_2 = 1 \text{ A} \quad (\text{أ}) \quad i_2 = -2 \text{ A} \quad (\text{ب}) \quad i_2 = 0 \text{ A} \quad (\text{ج})$$

الجهد  $v$  هو مجموع جهد المنبع المطلق  $10 \text{ V}$  وجهد المنبع ذو التيار التابع  $v_x$ . لاحظ أن المعامل الحسابي  $15$  المضروب في تيار التحكم ذو وحدات مقاومة  $\Omega$ .

$$(a) \quad v = 10 + v_x = 10 + 15 (1) = 25 \text{ V}$$

$$(b) \quad v = 10 + v_x = 10 + 15 (-2) = -20 \text{ V}$$

$$(c) \quad v = 10 + 15 (0) = 10 \text{ V}$$



شكل 2-16

2-10 أوجد القدرة المستهلكة في دائرة ما بها عدة عناصر ومبينة تخطيطاً شكل 2-17 لكل من :  
(أ)  $v = 50 \text{ V}$  ، (ب)  $v = -50 \text{ V}$ .



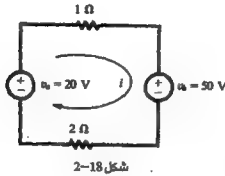
شكل 2-17

حيث أن التيار يدخل الدائرة من ناحية الإشارة السالبة فإن :

$$(a) \quad p = -v_i = -(50)(8.5) = -425 \text{ W}$$

$$(a) \quad p = -v_i = -(-50)(8.5) = 425 \text{ W}$$

2-11 أوجد القدرة التي يعطيها المنبعان شكل 2-18.



$$i = \frac{20 - 50}{3} = -10 \text{ A}$$

القدرات المسحوبة من المنبعين هي :

$$p_a = -v_a i = -(20)(-10) = 200 \text{ W}$$

$$p_b = v_b i = (50)(-10) = -500 \text{ W}$$

وحيث أن القدرة المعطاة تكون سالبة بالنسبة للقدرة المستهلكة فإن المنبع  $v_a$  يعطي 200 W ويستهلك  $v_b$  500 W. وبذلك تكون القدرة في المقاومتين هي 300 W.

2-12 مقاومة قيمتها  $25.0 \Omega$  عليها جهداً  $v = 150.0 \sin 377t$  (V) أوجد القدرة  $p$  والقدرة المتوسطة  $P_{avg}$  خلال دورة واحدة.

$$i = v / R = 6.0 \sin 377t \text{ (A)}$$

$$p = v i = 900.0 \sin^2 377t \text{ (W)}$$

تنتهى دورة دالة كلا من الجهد والتيار عند  $377t = 2\pi$  وللحصول على  $P_{avg}$  تكامل دالة القدرة خلال نصف دورة  $377t = \pi$  وبذلك .

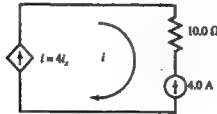
$$P_{avg} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 900.0 \sin^2(377t) d(377t) = 450.0 \text{ (W)}$$

2-13 أوجد الجهد على طرفى المقاوم  $10.0 \Omega$  فى شكل 2-19 إذا كان تيار التحكم  $i_x$  فى المنبع التابع (أ)  $2A$  ، (ب)  $-1A$  .

$$i = 4i_x - 4.0 ; \quad v_R = iR = 40.0i_x - 40.0 \text{ (V)}$$

$$i_x = 2 ; \quad v_R = -40.0 \text{ (V)}$$

$$i_x = -1 ; \quad v_R = -80.0 \text{ (V)}$$



شكل 2-19

### مسائل إضافية

2-14 إذا كان الجهد على طرفى مقاومة هو  $V = 1.5 \text{ mV}$  . أوجد التيار إذا كانت القدرة المستهلكة (أ)  $27.75 \text{ nW}$  ، (ب)  $1.20 \mu\text{W}$  . الجواب (أ)  $0.8 \text{ mA}$  ، (ب)  $18.5 \mu\text{A}$  .

2-15 مقاومة قيمتها  $5.0 \Omega$  يمر بها تيار قيمته  $i = 5.0 \times 10^3 t \text{ (A)}$  فى الفترة  $0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$  . أوجد القدرة اللحظية والقدرة المتوسطة . الجواب (أ)  $125.0t^2 \text{ (W)}$  ، (ب)  $167.0 \text{ (W)}$  .

2-16 إذا دخل التيار فى دائرة ما من ناحية طرف التوصيل الموجب وكان الجهد على الدائرة هو  $3.19 \text{ V}$  . وإذا كانت القدرة المستهلكة هي  $25 \text{ mW}$  . أوجد التيار . الجواب  $-6.4 \text{ mA}$  .

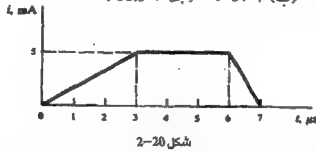
2-17 أوجد نوع وقيمة العنصر الموجود في الدائرة إذا كان التيار والجهد في الفترة  $0 \leq 10^3 t < \pi$  هما  $i = 2.0 \sin 10^3 t$  (mA) ،  $v = 5.0 \cos 10^3 t$  (mV) . الجواب: ملف حتى قيمته 2.5 mH .

2-18 ملف حثه 4.0 mH على طرفيه جهداً قيمته  $v = 2.0e^{-10^3 t}$  (V) . أوجد القيمة العظمى للطاقة المخزنة علماً بأن التيار = صفراً عند  $t = 0$  . الجواب: 0.5 mW .

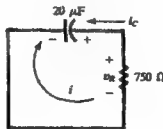
2-19 مكثف سعته  $2.0 \mu F$  عليه شحنة ابتدائية  $Q_0$  تم توصيله بمقاومة على التوالي قيمتها  $10.0 \Omega$  . أوجد قيمة  $Q_0$  إذا كانت الطاقة المستهلكة في المقاومة 3.6 mJ . الجواب:  $120.0 \mu C$  .

2-20 مكثف سعته C فاراد يمر به تياراً  $i = (V_m/R)e^{-t(R/C)}$  (A) ، أثبت أن الطاقة العظمى المخزنة هي  $\frac{1}{2} CV_m^2$  افترض أن الشحنة الابتدائية صفر .

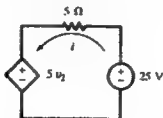
2-21 إذا كان تغير التيار مع الزمن بعد  $t = 0$  هو كما في شكل 2-20 . أوجد الجهد على طرفي العنصر عند  $t = 6.5 \mu s$  إذا كان العنصر (أ)  $10 k\Omega$  ، (ب) 15 mH ، (ج) 0.3 nF باعتبار  $Q(0) = 0$  . الجواب: (أ) 25 V ، (ب) -57 V ، (ج) 81.3 V .



2-22 إذا كان الجهد على طرفي مكثف سعته  $20.0 \mu F$  في الفترة  $t > 0$  هو  $v = 100.0e^{-t/0.015}$  (V) . أوجد دالة الطاقة التي تصاحب تفريغ المكثف . وقارن الطاقة الكلية بتلك المستهلكة في مقاومة  $750 \Omega$  . الجواب: (J)  $(1 - e^{-t/0.0075}) \cdot 0.10$  .



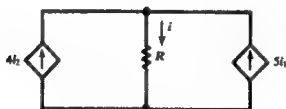
2-23 أوجد قيمة التيار في الدائرة شكل 2-22 إذا كان جهد التحكم  $v_2$  لمنبع الجهد التابع له القيم (أ) 4 V ، (ب) 5 V ، (ج) 10 V . الجواب : (أ) 1 A ، (ب) 0 A ، (ج) -5 A .



شكل 2-22

2-24 في الدائرة المبينة في الشكل 2-23 . أوجد التيار  $i$  إذا كان (أ)  $i_1 = 2$  A ،  $i_2 = 0$  . (ب)  $i_1 = -1$  A ،  $i_2 = 4$  A . (ج)  $i_1 = i_2 = 1$  A .

الجواب : (أ) 10 A ، (ب) 11 A ، (ج) 9 A .



شكل 2-23



## الفصل الثالث

### قوانين الدائرة

#### 3.1 مقدمة

تتكون الدائرة الكهربائية أو الشبكة الكهربائية من عدد من عناصر الدائرة متصلة ببعضها كما ذكر في الفصل الثانى . وتحتوى الدائرة عادة على منبع واحد على الأقل للجهد أو التيار . هذه التركيبة من العناصر ينشأ عنها مجموعة من الارتباطات بين الجهود والتيارات . هذه الارتباطات الجديدة والمعادلات المستتجة منها بالإضافة إلى علاقات الجهد والتيار لكل عنصر على حدة تحقق حل الشبكة .

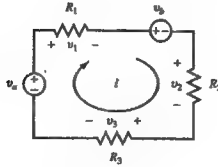
والسبب الكامن وراء تعريف كل عنصر على حدة وتوصيله بالشبكة وحل المعادلات هو فى تحليل أداء النبائط الكهربائية مثل المحركات والمولدات والمحولات والملفات الكهربائية بالإضافة إلى النبائط الإلكترونية . والحل غالباً هو فى الحصول على الإجابات للأسئلة الضرورية التى تفسر أداء النبيلة المستخدمة مع منبع الطاقة .

#### 3.2 قانون كيرشوف للجهد

فى أى شبكة مغلقة ينص قانون كيرشوف للجهد (KVL) أن المجموع الجبرى للجهود يساوى صفراً . بعض هذه الجهود خاصة بالمتابع وبعضها الآخر ينشأ من مرور التيار فى العناصر غير الفعالة الذى يطلق عليه أحياناً بفقد الجهد . ويمكن تطبيق هذا القانون أيضاً للدوائر التى تستخدم منابع ثابتة ، لتيار مستمر DC ، و منابع تتغير قيمتها مع الزمن  $v(t)$  ،  $i(t)$  . ومع الدوائر التى تعمل مع منابع

سيجى ذكرها فى الفصل التاسع . وطريقة تيار الشبكة لتحليل الدائرة المذكورة فى بند 2-4 تعتمد على قانون كيرشوف للجهد .

**مثال 3-1:** أكتب معادلة KVL للدائرة المبينة شكل 3-1 .



شكل 3-1

إذا بدأنا من الركن الأسفل على اليسار للدائرة وباعتبار اتجاه التيار كما هو مبين نحصل على :

$$-v_a + v_1 + v_b + v_2 + v_3 = 0$$

$$-v_a + iR_1 + v_b + iR_2 + iR_3 = 0$$

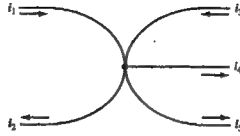
$$v_a - v_b = i(R_1 + R_2 + R_3)$$

### 3.3 قانون كيرشوف للتيار

عند توصيل عنصرين أو أكثر بنقطة ينشأ وصلة تعرف بالعقدة . والوصلة التى تصل عنصرين فقط تسمى عقدة بسيطة حيث لا يحدث تقسيم التيار . والوصلة التى تحتوى على ثلاث عناصر أو أكثر تعرف بالعقدة الرئيسية وهنا يحدث فعلاً تقسيم للتيار . ومنطوق قانون كيرشوف للتيار (KCL) يقرر أن المجموع الجبرى للتيارات عند أى عقدة يساوى صفراً . ويمكن كتابة القانون بطريقة أخرى بأن يكون مجموع التيارات الداخلة للعقدة تساوى مجموع التيارات الخارجة منها . وطريقة جهد العقدة التى استخدمت فى تحليل الشبكة فى بند 3-4 يقوم على كتابة معادلات عند العقد الرئيسية للشبكة باستخدام قانون كيرشوف للتيار وأساس هذا القانون يقوم على نظرية بقاء الشحنة .

**مثال 3-2:** أكتب معادلة KCL للقوة المركبة المبينة شكل 3-2 .





شكل 3-2

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

$$i_1 + i_3 = i_2 + i_4 + i_5$$

### 3.4 توصيل عناصر الدائرة على التوالي

ثلاث عناصر غير فعالة للدائرة متصلة على التوالي كما في شكل 3-3 يمر بها حثث التيار  $i$  وتكون الجهود على طرفيها هي  $v_1$  ،  $v_2$  ،  $v_3$  والجهود الكلى  $v$  هو مجموع الجهود السلاط  $v = v_1 + v_2 + v_3$ .



شكل 3-3

إذا كانت هذه العناصر مقاومات فإن :

$$v = iR_1 + iR_2 + iR_3$$

$$= i(R_1 + R_2 + R_3)$$

$$= iR_{eq}$$

حيث تكون  $R_{eq}$  هي المقاومة المكافئة للثلاث مقاومات وتنشأ نفس العلاقة بين التيار  $i$  والجهود  $v$ .

ولأى عدد من المقاومات نحصل على  $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots$ .

وإذا كانت الثلاث عناصر غير الفعالة حثية فإن :

$$\begin{aligned} v &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di}{dt} \\ &= L_{eq} \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

ويعتبر ذلك لأى عدد من الحث على التوالى نحصل على  $L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots$

وإذا كانت الثلاث عناصر فى الدائرة مكثفات وباعتبار الشحنات الابتدائية صفراً حيث يكون ثابت التكامل صفراً.

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{C_1} \int i \, dt + \frac{1}{C_2} \int i \, dt + \frac{1}{C_3} \int i \, dt \\ &= \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int i \, dt \\ &= \frac{1}{C_{eq}} \int i \, dt \end{aligned}$$

والسعة المكافئة لمكثفات متعددة على التوالى هو  $1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots$

**مثال 3-3:** إذا كانت المقاومة المكافئة لثلاث مقاومات على التوالى هى  $750.0 \, \Omega$  ، اثنى منها هما  $40.0 \, \Omega$  ،  $410.0 \, \Omega$  فماذا يجب أن تكون قيمة المقاومة الثالثة .

$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_1 + R_2 + R_3 \\ 750.0 &= 40.0 + 410.0 + R_3 \quad \text{and} \quad R_3 = 300.0 \, \Omega \end{aligned}$$

**مثال 3-4:** مكثفان  $C_1 = 2.0 \, \mu F$  ،  $C_2 = 10.0 \, \mu F$  ، متصلان على التوالى . أوجد السعة المكافئة . كرر الحل إذا كانت  $C_2 = 10 \, pF$  .

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(2.0 \times 10^{-6})(10.0 \times 10^{-6})}{2.0 \times 10^{-6} + 10.0 \times 10^{-6}} = 1.67 \, \mu F$$

إذا كان  $C_2 = 10.0 \text{ pF}$  .

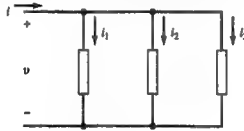
$$C_{eq} = \frac{(2.0 \times 10^{-6})(10.0 \times 10^{-12})}{2.0 \times 10^{-6} + 10.0 \times 10^{-12}} = \frac{20.0 \times 10^{-18}}{2.0 \times 10^{-6}} = 10.0 \text{ pF}$$

حيث أعتبرت القيمة  $10.0 \times 10^{-12}$  للمجموع  $C_1 + C_2$  فى المقام كمية صغيرة جداً ومهملة .

**ملحوظة :** حينما تختلف قيمتا مكثفان على التوالى بفرق كبير تكون فى الغالب السعة المكافئة لهما مساوية لأصغر المكثفان .

### 3.5 توصيل عناصر الدائرة على التوازى

عند توصيل ثلاث عناصر على التوازى كما فى الشكل 3-4 فإن قانون KCL يقرر أن التيار  $i$  الذى يدخل العقدة الرئيسية هو مجموع التيارات التى تخرج منها من خلال الأفرع الثلاثة .



شكل 3-4

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

إذا كانت الثلاث عناصر للدائرة مقاومات فإن :

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) v = \frac{1}{R_{eq}} v$$

ولعدة مقاومات على التوازى يكون :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

يلاحظ أن توصيل مقاومتين على التوازي يحدث كثيراً ولذا يجدر كتابة المقاومة المكافئة لهما وهي خارج قسمة حاصل ضربهما على حاصل جمعهما .

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

مثال 5-3: أوجد المقاومة المكافئة لكل من : (أ) مقاومتان على التوازي كل منهما  $60.0 \Omega$  ، (ب) ثلاث مقاومات على التوازي كل منهما  $60.0 \Omega$  .

$$(a) \quad R_{eq} = \frac{(60.0)^2}{120.0} = 30.0 \Omega$$

$$(b) \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{60.0} + \frac{1}{60.0} + \frac{1}{60.0} \quad R_{eq} = 20.0 \Omega$$

**ملحوظة :** لعدد  $n$  من المقاومات المتساوية المتصلة على التوازي تكون المقاومة المكافئة لهم  $R/n$  .  
وبالنسبة لمجموعة الحث على التوازي يكون لها نفس العلاقات الخاصة بالمقاومات على التوازي .

وبالنسبة لحثين على التوازي يكون

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots \quad \text{and, for two inductances,} \quad L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

مثال 6-3: حثان متصلان على التوازي  $L_1 = 30 \text{ mH}$  ،  $L_2 = 6.0 \text{ mH}$  أوجد  $L_{eq}$  .

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{3.0 \text{ mH}} + \frac{1}{6.0 \text{ mH}} \quad \text{and} \quad L_{eq} = 2.0 \text{ mH}$$

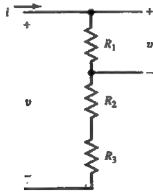
وعند استخدام ثلاث مكثفات على التوازي يكون :

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2 + C_3) \frac{dv}{dt} = C_{eq} \frac{dv}{dt}$$

وبتوصيل عدة مكثفات على التوازي فإن  $C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots$  التى يكون لها نفس الشئبه مع توصيل مقاومات على التوالى .

### 3.6 تقسيم الجهد

إذا تم توصيل مجموعة من المقاومات على التوالى كما فى شكل 3-5 فإنه يطلق عليها مجزئ الجهد ويمكن تطبيق نفس المفهوم باستخدام معاوقات على التوالى كما سنبينه فى الفصل التاسع .



شكل 3-5

$$v = i(R_1 + R_2 + R_3) , \quad v_1 = iR_1$$

$$v_1 = v \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \right)$$

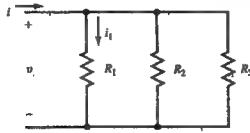
مثال 3-7: مجزئ للجهد مكون من مقاومتين مصمم على أساس أن المقاومة الكلية للمقاومتين تساوى  $50.0 \Omega$  . فإذا كان جهد المخرج 10% من جهد الدخل . أوجد قيمة كلا من المقاومتين .

$$\frac{v_1}{v} = 0.10 \quad 0.10 = \frac{R_1}{50.0 \times 10^3}$$

from which  $R_1 = 5.0 \Omega$  and  $R_2 = 45.0 \Omega$  .

### 3.7 تقسيم التيار

يتبع عن توصيل عدة مقاومات على التوازي مجزئ التيار كما فى شكل 3-6 وقيمة التيار الفرع  $i_1$  بالنسبة للتيار الكلى  $i$  بين وظيفة المجزئ ،



شكل 3-6

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} \quad \text{and} \quad i_1 = \frac{v}{R_1}$$

$$\frac{i_1}{i} = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

ولمجزئ التيار ذو الفرعين نحصل :

$$\frac{i_1}{i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

يمكن التعبير عن ذلك كما يلى : نسبة التيار فى أحد الأفرع لدائرة تحتوى على فرعين على التوازي إلى التيار الكلى للدائرة يساوى نسبة مقاومة الفرع الآخر إلى مجموع مقاومتي الفرعين .

**مثال 3-8 :** المطلوب تقسيم تيار قيمته 30.0 mA إلى فرعين أحدهما 20.0 mA والآخر 10.0 mA بواسطة مجزئ تيار مقاومته المكافئة أكبر من أو تساوى من 10.0 Ω . أوجد فرعى المقاومتان .

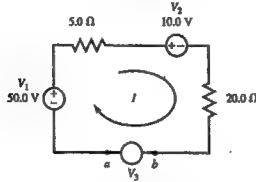
$$\frac{20 \text{ mA}}{30 \text{ mA}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \frac{10 \text{ mA}}{30 \text{ mA}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \geq 10.0 \Omega$$

ويحل هذه المعادلات نحصل على :

$$R_1 \geq 15.0 \Omega , \quad R_2 \geq 30.0 \Omega$$

### مسائل محلولة

3-1 أوجد قيمة  $V_3$  وقطبيها إذا كان التيار  $I$  في الدائرة المبينة شكل 3-7 هو 40.0 A .



شكل 3-7

باعتبار أن  $V_3$  لها نفس قطبية  $V_1$  وتطبيق KVL مبتدأ بالركن الأسفل يسار فإن :

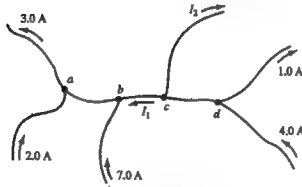
$$V_1 - I(5.0) - V_2 - I(20.0) + V_3 = 0$$

$$50.0 - 2.0 - 10.0 - 8.0 + V_3 = 0$$

$$V_3 = -30.0 \text{ V}$$

الطرف b يكون موجباً بالنسبة للطرف a .

3-2 أوجد التيارات  $I_1$  ،  $I_2$  للشبكة المبينة شكل 3-8 .



شكل 3-8

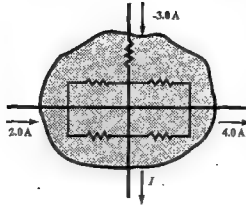
النقطتان a ، b يكونان عقدة واحدة وتطبيق KCL .

$$2.0 + 7.0 + I_1 = 3.0 \text{ or } I_1 = -6.0 \text{ A}$$

وأيضاً النقطتان c ، d تكونان عقدة واحدة وبذلك .

$$4.0 + 6.0 + I_2 = 1.0 \text{ or } I_2 = 9.0 \text{ A}$$

3-3 أوجد التيار I فى الدائرة المبينة شكل 3-9.

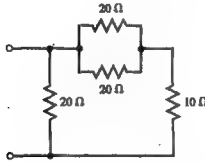


شكل 3-9

تيارات الأفرع الموجودة فى الجزء المظلل من الشكل لا يمكن معرفتها نظراً لعدم وجود قيم للمقاومات ومع ذلك عند تطبيق KCL باعتبار المجموعة عقدة واحدة فإن:

$$2.0 - 3.0 - 4.0 - I = 0 \quad \text{or} \quad I = -5.0 \text{ A}$$

3-4 أوجد المقاومة المكافئة للدائرة المبينة شكل 3-10.



شكل 3-10

مقاومتان  $20 \Omega$  المتصلتان على التوازي: المقاومة المكافئة لهما هي:

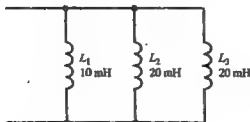
$$R_{eq} = [(20)(20) / (20 + 20)] = 10 \Omega$$

وهذه المقاومة تكون على التوالى مع المقاومة  $10 \Omega$  ويكون المجموع  $20 \Omega$ . وهذا بدوره

يكون على التوازي مع مقاومة أخرى قيمتها  $20 \Omega$  وبذلك يكون المقاومة المكافئة الكلية هي  $10 \Omega$ .



3-5 أوجد الحث المكافئ لثلاث عناصر حثية على التوازي كما فى شكل 3-11.

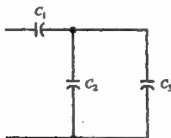


شكل 3-11

الحثان 20 mH لهما حث مكافئ قيمته 10 mH وهذه الأخيرة تكون على التوازي مع الحث 10 mH وبذلك يكون الحث المكافئ الكلى 5 mH أو تستخدم العلاقة التالية :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = \frac{1}{10 \text{ mH}} + \frac{1}{20 \text{ mH}} + \frac{1}{20 \text{ mH}} = \frac{4}{20 \text{ mH}} \quad \text{or} \quad L_{eq} = 5 \text{ mH}$$

3-6 أوجد قيمة السعة الكلية للثلاث مكثفات المبينة فى شكل 3-12.



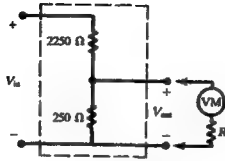
شكل 3-12

للمكثفين  $C_2$  ،  $C_3$  على التوازي  $C_{eq} = C_2 + C_3$  وبذلك تكون  $C_1$  ،  $C_{eq}$  على التوالى .

$$C_T = \frac{C_1 C_{eq}}{C_1 + C_{eq}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

3-7 الدائرة المبينة فى شكل 3-13 هى مجزئ للجهد ويطلق عليها أيضاً مضعف . وحينما تكون مقاومة واحدة ذو طرف ضبط متحرك تسمى مقياس الجهد ولاكتشاف تأثير التحميل الناجم من المقاومة R على الفولتметр VM تحسب نسبة  $V_{out}/V_{in}$  فى الحالات (أ)  $R = \infty$  ، (ب)  $1 \text{ M}\Omega$  ، (ج)  $10 \text{ k}\Omega$  (د)  $1 \text{ k}\Omega$  .

$$(a) \quad V_{out}/V_{in} = \frac{250}{2250 + 250} = 0.100$$



شكل 3-13

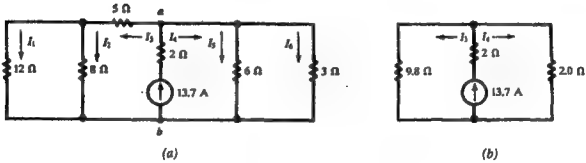
(b) المقاومة المكافئة للمقاومتين  $250 \Omega$  ،  $R$  هي :

$$R_{eq} = \frac{250(10^6)}{250 + 10^6} = 249.9 \Omega \quad \text{and} \quad V_{out}/V_{in} = \frac{249.9}{2250 + 249.9} = 0.100$$

$$(c) \quad R_{eq} = \frac{(250)(10\,000)}{250 + 10\,000} = 243.9 \Omega \quad \text{and} \quad V_{out}/V_{in} = 0.098$$

$$(d) \quad R_{eq} = \frac{(250)(1000)}{250 + 1000} = 200.0 \Omega \quad \text{and} \quad V_{out}/V_{in} = 0.082$$

3-8 أوجد تيارات جميع الأفرع للشبكة المبينة في شكل (a) 3-14.



شكل 3-14

المقاومات المكافئة على يمين ويسار العقدتين a ، b هي :

$$R_{eq(left)} = 5 + \frac{(12)(8)}{20} = 9.8 \Omega$$

$$R_{eq(right)} = \frac{(6)(3)}{9} = 2.0 \Omega$$

والآن بالرجوع إلى الشبكة المبسطة شكل (b) 3-14 فإن :

$$I_3 = \frac{2.0}{11.8} (13.7) = 2.32 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{9.8}{11.8} (13.7) = 11.38 \text{ A}$$

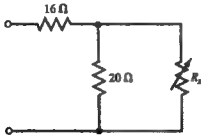
وبالرجوع إلى الشبكة الأصلية فإن :

$$I_1 = \frac{8}{20} (2.32) = 0.93 \text{ A} \quad I_2 = 2.32 - 0.93 = 1.39 \text{ A}$$

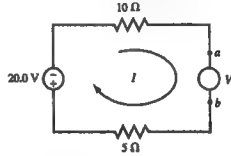
$$I_5 = \frac{3}{9} (11.38) = 3.79 \text{ A} \quad I_6 = 11.38 - 3.79 = 7.59 \text{ A}$$

### مسائل إضافية

3-9 أوجد قيمة جهد وقطبية المنبع  $V$  في الدائرة المبينة في شكل 3-15 إذا كان  $I = 2 \text{ A}$  (أ) ،  $I = -2 \text{ A}$  (ب) .  
الجواب : (أ)  $50 \text{ V}$  موجب  $b$  ، (ب)  $10 \text{ V}$  موجب  $a$  .



شكل 3-16

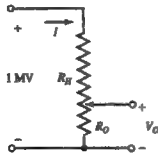


شكل 3-15

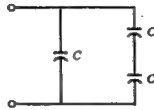
3-10 أوجد  $R_{eq}$  للدائرة المبينة في شكل 3-16 للقيم (أ)  $R_x = \infty$  ، (ب)  $R_x = 0$  ، (ج)  $R_x = 5 \Omega$  .  
الجواب : (أ)  $36 \Omega$  ، (ب)  $16 \Omega$  ، (ج)  $20 \Omega$  .

3-11 حث قيمته  $8 \text{ mH}$  متصل على التوالي مع حثين على التوازي أحدهما  $3 \text{ mH}$  والآخر  $6 \text{ mH}$  .  
أوجد  $L_{eq}$  . الجواب  $10.0 \text{ mH}$  .

3-12 أثبت أن الثلاث مكثفات ذات القيم المتساوية  $C$  المبينة في شكل 3-17 لهم القيمة المكافئة  $C_{eq} = 1.5 C$  .



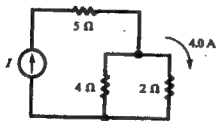
شكل 3-18



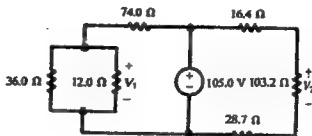
شكل 3-17

3-13 أوجد  $R_O$  ،  $R_H$  لمجزئ الجهد المبين في شكل 3-18 بحيث يكون التيار  $I$  في حدود 0.5 A حينما تكون  $V_O = 100 \text{ V}$  . الجواب :  $R_O = 200 \Omega$  ،  $R_H = 2 \text{ M}\Omega$  .

3-14 باستخدام تقسيم الجهد أحسب كل من  $V_1$  ،  $V_2$  في الشبكة المبينة في شكل 3-19 . الجواب :  $11.4 \text{ V}$  ،  $73.1 \text{ V}$  .



شكل 3-20



شكل 3-19

3-15 أوجد تيار المنبع  $I$  والقدرة الكلية المعطاة للدائرة المبينة في شكل 3-20 . الجواب :  $6.0 \text{ A}$  ،  $228 \text{ W}$  .

3-16 اثبت أن لأربع مقاومات متصلة على التوازي يكون التيار في أحد الأفرع وليكن فرع  $R_4$  بالنسبة للتيار الكلي حسب العلاقة .

$$I_4 = I_T \left( \frac{R'}{R_4 + R'} \right) \quad \text{where } R' = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

**ملحوظة :** هذه الحالة مشابهة لما سبق في حالة فرعين على التوازي حيث نستبدل المقاومة الأخرى بالمقاومة  $R'$  .

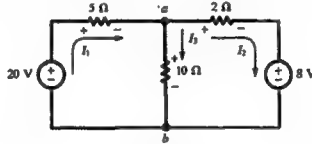
## الفصل الرابع

### طرق التحليل

#### 4.1 طريقة تيار الفرع

فى هذه الطريقة نفرض تياراً لكل فرع فى الشبكة الفعالة ثم يطبق قانون كيرشوف للتيار عند العقد الرئيسية وتحدد الجهود بين العقد بدلالة التيارات ويتبع عن ذلك مجموعة من المعادلات الآتية يمكن حلها للحصول على قيم التيارات .

مثال 4-1: باستخدام طريقة تيار الفرع أوجد التيار فى كل فرع فى الشبكة المبينة شكل 4-1 .



شكل 4-1

نفترض التيارات  $I_1$ ،  $I_2$ ،  $I_3$  للأفرع المبينة فى الشكل وتطبيق KCL عند العقدة (a) ينتج :

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

ويمكن كتابة الجهد  $V_{ab}$  بدلالة العناصر الموجودة فى كل فرع (5)  $V_{ab} = I_3$ ،  $V_{ab} = 20 - I_1$

$$(10)، \quad V_{ab} = I_2(2) + 8 . \quad \text{وبذلك يمكن كتابة المعادلتين التاليتين :}$$

$$20 - I_1(5) = I_3(10) \quad (2)$$

$$20 - I_1(5) = I_2(2) + 8 \quad (3)$$

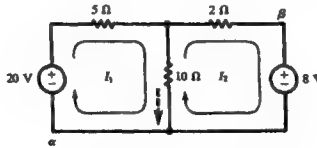
بحل الثلاث معادلات (1)، (2)، (3) أيضاً نحصل على  $I_3 = 1\text{ A}$  ،  $I_2 = 1\text{ A}$  ،  $I_1 = 2\text{ A}$ .

يمكن فرض اتجاهات أخرى لتيارات الأفرع حيث سيستعمل الحل على الإشارة المناسبة. فى الشبكات الأكثر تعقيداً يصعب تطبيق طريقة تيارات الأفرع لأنه من الصعب تحديد نقطة البداية والعدد اللازم من المعادلات. أيضاً المعادلات الناتجة فى هذه الطريقة تكون أكثر استقلالية عن طريقة تيار الشبكة أو طريقة جهد العقدة.

## 4.2 طريقة تيار الشبكة (الحلقة)

فى هذه الطريقة تقسم الشبكة إلى دوائر مغلقة (حلقات) ويفترض لكل من هذه الدوائر ويطلق على هذا التيار أحياناً بالتيار الحلقى وبذلك يكون لكل عنصر وفرع تيار مستقل بذاته. وحينما يمر فى أحد أفرع الشبكة تياران فإن التيار الحلقى المار به هو المجموع الجبرى لهما. ويمكن افتراض اتجاه موحد للتيار الحلقى إما فى اتجاه عقارب الساعة أو عكس هذا الاتجاه. وبمجرد تحديد اتجاه التيارات نستخدم قانون كيرشوف للجهد لكل حلقة للحصول على المعادلات الآتية اللازمة.

**مثال 4-2:** أوجد التيار فى كل فرع فى الشبكة المبينة شكل 4-2 (وهى نفس شكل 1-4 باستخدام طريقة تيار الشبكة).



شكل 4-2

تختار التيارين  $I_1$  ،  $I_2$  كما هو مبين بالشكل وتطبيق KVL حول الحلقة اليسار مبتدئاً بالنقطة  $\alpha$ .

$$-20 + 5I_1 + 10(I_1 - I_2) = 0$$

وبالمرور حول الحلقة اليمنى مبتدئاً بالنقطة  $\beta$  فإن :

$$8 + 10(I_2 - I_1) + 2I_2 = 0$$

$$\begin{aligned} 15I_1 - 10I_2 &= 20 \\ -10I_1 + 12I_2 &= -8 \end{aligned}$$

ويحل (4)، (5) أيضاً ينتج  $I_1 = 2 \text{ A}$  ،  $I_2 = 1 \text{ A}$  ويكون التيار في الفرع الأوسط المين بالسهم المنقط  $I_1 - I_2 = 1 \text{ A}$  . وفي مثال 4-1 كان ذلك هو تيار الفرع  $I_3$ .

وبالرغم من أننا نحدد تياراً لكل حلقة، إلا أنه لا يقتصر على الحلقات فقط حتى يمكن الحصول على مجموعة المعادلات اللازمة . وعلى سبيل المثال انظر مسألة 4-6 حيث تمر جميع التيارات بالمنبع وتسمى تيارات حلقة والقاعدة المتبعة هي أن كل عنصر في الشبكة يكون له تيار أو أكثر ولا يمكن أن يكون لأي عنصرين في فرعين مختلفين نفس التيار أو نفس مجموعة التيارات .

### 4.3 المصفوفات والمحددات

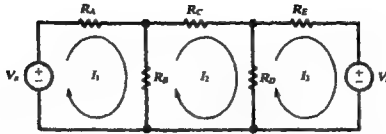
المعادلات الآتية التي عددها  $n$  لشبكة تحتوي على  $n$  شبكية يمكن كتابتها على شكل مصفوفة (راجع الملحق B الخاص بالمقدمة عن المصفوفات والمحددات) .

**مثال 4-3 :** بتطبيق KVL للشبكة ذات الثلاث شبكيات المثبتة في شكل 4-3 يمكن الحصول على الثلاث معادلات التالية :

$$\begin{aligned} (R_A + R_B)I_1 - R_B I_2 &= V_s \\ -R_B I_1 + (R_B + R_C + R_D)I_2 - R_D I_3 &= 0 \\ -R_D I_2 + (R_D + R_E)I_3 &= -V_s \end{aligned}$$

وبوضع هذه المعادلات على شكل مصفوفة :

$$\begin{bmatrix} R_A + R_B & -R_B & 0 \\ -R_B & R_B + R_C + R_D & -R_D \\ 0 & -R_D & R_D + R_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ 0 \\ -V_s \end{bmatrix}$$



شكل 4-3

يمكن كتابة الشكل العام للمصفوفات بعناصر الدائرة كما يلي :

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

حيث يكون العنصر  $R_{11}$  (صف 1 عمود 1) هو مجموع المقاومات التي يمر بها تيار الشبكة (الحلقة)  $I_1$  وبذلك تكون هي  $R_A + R_B$  في شكل 4-3 وبالمثل يكون العنصر  $R_{22}$ ،  $R_{33}$  هي مجموع المقاومات التي يمر بها كل من  $I_2$ ،  $I_3$  على التوالي .

العنصر  $R_{12}$  (صف 1 عمود 2) هي مجموع المقاومات التي يمر بها التياران  $I_1$ ،  $I_2$  وتكون إشارة  $R_{12}$  موجبة (+) إذا كان كلا التيارات في نفس الاتجاه لكل مقاومة وسالبة (-) إذا كانا في إتجاهين متضادين . في شكل 4-3 نجد أن  $R_B$  هي المقاومة الوحيدة المشتركة مع  $I_1$ ،  $I_2$  وإتجاهات التيارت بها متضاد حيث تكون الإشارة سالبة وبالمثل تكون العناصر  $R_{21}$ ،  $R_{23}$ ،  $R_{13}$ ،  $R_{31}$  هي مجموع المقاومات المشتركة مع تيارى الحلقة حسب رمز التيار كما سبق بيانه بالنسبة للمقاومة  $R_{12}$  وإذا كان ترميز المقاومات بالرمزين  $i$ ،  $j$  فإن  $R_{ji} = R_{ij}$  وبذلك تكون المصفوفة متناظرة بالنسبة لقطرها الرئيسى .

ولا يحتاج التيار لتوضيح حيث أن عناصره في عمود واحد ولكل تيار رمز خاص به 1، 2، 3، . . . وهذه التيارت هي للمجاهيل في طريقة التيار الحلقي عند تحليل الشبكة .

ويعتبر الجهد  $V_1$  هو مجموع جهود المنابع الخاصة بالتيار الحلقي  $I_1$  وبحسب الجهد موجباً إذا مر التيار  $I_1$  من الطرف السالب (-) إلى الطرف الموجب (+) وإلا يعتبر الجهد سالباً وبعبارة أخرى يكون الجهد موجباً إذا كان المنبع في إتجاه التيار الحلقي . ففي شكل 4-3 تكون الحلقة ذات جهد منبع  $V_a$  يدفع التيار في إتجاه  $I_1$  والحلقة 2 ليس لها منبع والحلقة 3 لها المنبع  $V_b$  الذى يدفع التيار  $I_3$  فى الإتجاه المضاد وبذلك تكون  $V_3$  سالبة .



ويمكن حل المصفوفة المستتجة من طريقة التيار الخلقى بعدة طرق . وإحدى هذه الطرق باستخدام المحددات (طريقة كرامر) التى تستخدم هنا ونلاحظ أن الطرق الأخرى تكون أكثر ملاءمة فى الشبكات الكبيرة .

**مثال 4-4:** حل المصفوفة فى المعادلة (6) باستخدام طريقة المحددات .

نحصل على التيار للجهد  $I_1$  كنسبة بين محددين . ويكون محدد المقام له عناصر مصفوفة المقاومات وهو ما يطلق عليه محدد المعاملات ويرمز له بالرمز  $\Delta_R$  . ومحدد البسط له نفس العناصر  $\Delta_R$  فيما عدا العمود الأول حيث يكتب فيه الجهود الموجودة فى مصفوفة الجهد وبذلك :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

وبالمثل :

$$I_2 = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & V_1 & R_{13} \\ R_{21} & V_2 & R_{23} \\ R_{31} & V_3 & R_{33} \end{vmatrix} \quad I_3 = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & V_1 \\ R_{21} & R_{22} & V_2 \\ R_{31} & R_{32} & V_3 \end{vmatrix}$$

ويمكن فك محدثات البسط إلى محدثات أصغر تساعد فى فهم وحل الشبكة وذلك باستخدام قيم العمود المحتوى على الجهد مع محدثات المقاومات .

$$I_1 = V_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left( \frac{\Delta_{21}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left( \frac{\Delta_{31}}{\Delta_R} \right) \quad (7)$$

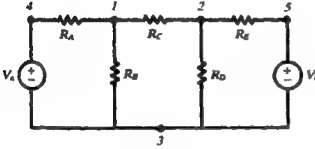
$$I_2 = V_1 \left( \frac{\Delta_{12}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left( \frac{\Delta_{22}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left( \frac{\Delta_{32}}{\Delta_R} \right) \quad (8)$$

$$I_3 = V_1 \left( \frac{\Delta_{13}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left( \frac{\Delta_{23}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left( \frac{\Delta_{33}}{\Delta_R} \right) \quad (9)$$

حيث  $\Delta_{ij}$  محل المحدد الأصغر للبسط  $R_{ij}$  (العنصر للصف  $i$  والعمود  $j$ ) فى  $\Delta_R$  . ويجب الانتباه لإشارات المحدثات الصغيرة - انظر الملحق B - .

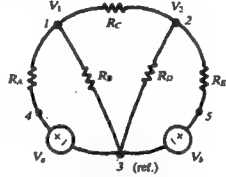
#### 4.4 طريقة جهد العقدة

تحتوى الشبكة شكل (a) 4-4 على خمس عقد حيث تكون العقدتان 4، 5 بسيطة والعقد 1، 2، 3 رئيسية وفى طريقة جهد العقدة نختار أحد العقد الرئيسية وتسمى عقدة المقارنة وتكتب معادلات KCL للعقد الرئيسية الأخرى ثم نفترض جهداً لكل من العقد الرئيسية الأخرى التى يمكن حل معادلاتها للحصول على قيمهم. (لاحظ أن الجهد المفترض يكون منسوباً لجهد عقدة المقارنة).



(a)

شكل 4-4



(b)

وترسم الشبكة مرة أخرى كما فى شكل (b) 4-4 وباعتبار العقدة 3 هى الرئيسية (عقدة المقارنة) بالنسبة للجهدين  $V_1$ ،  $V_2$  وتطبيق KCL حيث يكون مجموع التيارات عند العقدة 1 صفراً فإن :

$$\frac{V_1 - V_s}{R_A} + \frac{V_1}{R_B} + \frac{V_1 - V_2}{R_C} = 0$$

وبالمثل عند العقدة 2 فإن :

$$\frac{V_2 - V_1}{R_C} + \frac{V_2}{R_D} + \frac{V_2 - V_s}{R_E} = 0$$

(استخدم قانون KCL لا معنى بالضرورة أن جميع التيارات لأى عقدة متجهة إلى الخارج فى الحقيقة يكون التيار فى الفرع 1-2 متجهاً إلى الخارج من أحد العقد وللداخل لعقدة أخرى). وبوضع معادلتى الجهد  $V_1$ ،  $V_2$  فى صورة مصفوفة.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} & -\frac{1}{R_C} \\ -\frac{1}{R_C} & \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s/R_A \\ V_s/R_E \end{bmatrix}$$

لاحظ التشابه في حدود المصفوفة فالعنصر 1، 1 يحتوى على مجموع مقبوبات جميع المقاومات المتصلة بالعقدة 1 العنصر 2، 2 يحتوى على مجموع المقاومات المتصلة بالعقدة 2. ويكون كلا من العنصرين 1، 2 و 2، 1 محتويًا على سالب جمع مقبوبات المقاومات لجميع الأفرع التي تصل العقدة 1 بالعقدة 2 (يوجد فرع واحد بين العقدتين في هذه الحالة).

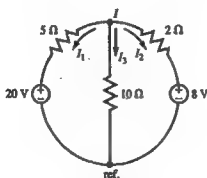
تحتوى مصفوفة التيار التي على الجانب الأيمن على  $V_B/R_B$  و  $V_A/R_A$  وهما يسميان تيارى الدفع. وكلاهما موجب لأنهما ويدفعان التيار إلى داخل العقدة. وستناول بالتفصيل دراسة عناصر المصفوفة باستخدام معادلات جهد العقدة في الفصل التاسع حيث نتعامل مع الشبكات باستخدام الموجات الجيبية المستقرة.

**مثال 4-5:** حل الدائرة التي في مثال 4-2 باستخدام طريقة جهد العقدة.

يعاد رسم الدائرة مرة ثانية لتكون كما في شكل 4-5. ولوجود عقدتين رئيسيتين فقط فإن معادلة واحدة تكفى. وباعتبار أن التيارات جميعها متجهة إلى الخارج من العقدة العليا وأن العقدة السفلى هي عقدة المقارنة.

$$\frac{V_1 - 20}{5} + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - 8}{2} = 0$$

ومنها  $V_1 = 10 \text{ V}$  ومن ثم  $I_1 = (10 - 20) / 5 = -2 \text{ A}$  (الإشارة السالبة تعنى أن التيار  $I_1$  يمر إلى داخل العقدة 1)،  $I_2 = (10 - 8) / 2 = 1 \text{ A}$ ،  $I_3 = 10/10 = 1 \text{ A}$  في مثال 4-2 موضح بسهم منقطع.



شكل 4-5

## 4.5 المقاومة الداخلة

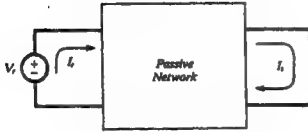
فى الشبكات ذات المنبع الواحد تكون المقاومة الداخلة ذات أهمية خاصة . مثل هذه الشبكة موضحة بشكل 4-6 حيث يكون الجهد المؤثر معرّفًا بالجهد  $V_1$  والتيار المناظر  $I_1$  . وحيث أن المنبع الوحيد الموجود هو  $V_1$  فإن معادلة  $I_1$  تكون (انظر معادلة رقم 7 من المثال 4-4) .

$$I_1 = V_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right)$$

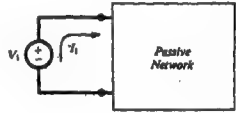
وتكون المقاومة الداخلة هى النسبة بين  $V_1$  إلى  $I_1$  .

$$R_{\text{input}, 1} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}}$$

ويجب أن يتحقق القارئ أن  $\Delta_R/\Delta_{11}$  ذات وحدات مقاومة  $\Omega$  .



شكل 4-6



شكل 4-6

## 4.6 مقاومة الانتقال

ينتج عن الجهد المؤثر فى أحد أجزاء الشبكة تيارات فى جميع أفرع الشبكة . وكمثال فإن وجود منبع متصلًا بشبكة غير فعالة ينتج عنه تياراً فى ذلك الجزء من الشبكة عندما يتم توصيله بمقاومة حمل . وفى هذه الحالة يكون للشبكة مقاومة انتقال كلية . وباعتبار الشبكة غير الفعالة المفترضة بشكل 4-7 حيث أن جهد المنبع  $V_r$  وتيار الخرج  $I_s$  . فإن معادلة تيار الشبكة للتيار  $I_s$  تحتوى فقط على حد واحد هو الناتج من الجهد  $V_r$  فى بسط المحدد .

$$I_s = (0) \left( \frac{\Delta_{1s}}{\Delta_R} \right) + \dots + 0 + V_r \left( \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_R} \right) + 0 + \dots$$

وتكون مقاومة الانتقال للشبكة هي نسبة  $V_r$  إلى  $I_s$ .

$$R_{transfer,rs} = \frac{\Delta_r}{\Delta_{rs}}$$

ولأن مصفوفة المقاومات متماثلة فإن  $\Delta_{rs} = \Delta_{sr}$  وتكون بذلك مقاومة الانتقال :

$$R_{transfer,rs} = R_{transfer,sr}$$

وهذا يمثل حقيقة هامة في الشبكات الخطية : إذا نتج تيار معين في شبكة  $s$  نتيجة لجهد معين في الشبكة  $r$  فإن نفس الجهد في الشبكة  $s$  ينشأ عنه نفس التيار في الشبكة  $r$ .

وإذا أخذنا الحالة العامة لعدد  $n$  من الشبكات لشبكة تحتوي على عدد من جهود المصادر فإن التيار للحلقة التي رقمها  $k$  يمكن كتابتها بدلالة المقاومة الداخلة ومقاومة الانتقال (راجع المعادلات (7)، (8)، (9) للمثال 4-4).

$$I_k = \frac{V_1}{R_{transfer,1k}} + \dots + \frac{V_{k-1}}{R_{transfer,(k-1)k}} + \frac{V_k}{R_{input,k}} + \frac{V_{k+1}}{R_{transfer,(k+1)k}} + \dots + \frac{V_n}{R_{transfer,nk}}$$

وفي الحقيقة لا يوجد هنا جديد من الناحية الرياضية ولكن معادلة التيار في هذا الشكل يوضح تماماً أن التيار يتكون من تجميع عدة تيارات ومبيناً كيف تتحكم المقاومات في تأثير الجهد على قيمة التيار في شبكة معينة . وعند فصل أحد المصادر البعيدة عن الشبكة  $k$  سيؤدي إلى مقاومة انتقال كبيرة في هذه الحلقة وبذلك يكون التأثير صغير جداً على التيار  $I_k$  . ويكون جهد المنبع  $V_k$  والجهود الأخرى في الشبكات المجاورة للشبكة  $k$  يمثل جزءاً كبيراً للتيار  $I_k$ .

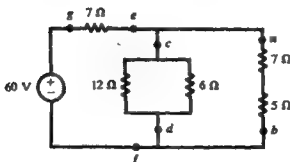
## 4.7 تبسيط الشبكات

بالرغم من أن الطرق الرئيسية في تحليل الدوائر هي تيار الشبكة وجهد العقدة . فإن المقاومة المكافئة للأفرع المتوالية أو المتوازية (بند 3-4 ، 3-5) مع قوانين تقسيم الجهد والتيار توفر وسيلة أخرى لتحليل الشبكات . وهذه الطريقة شائعة وتستلزم عادةً رسم عديد من الدوائر الإضافية ومع هذا فإن عملية تبسيط الشبكة يحقق صورة واضحة للعلاقات الخاصة بالجهد والتيار والقدرة للشبكة . وتبدأ عملية التبسيط بنظرة شاملة على الشبكة لإلتقاط أى مجموعات من المقاومات على التوالي أو على التوازي .

مسألة 4-6: أوجد القدرة المعطاة من منبع جهد 60 V وأوجد أيضاً القدرة المستهلكة في كل مقاومة في الشبكة المبينة في شكل 4-8.

$$R_{ab} = 7 + 5 = 12 \Omega$$

$$R_{cd} = \frac{(12)(6)}{12 + 6} = 4 \Omega$$



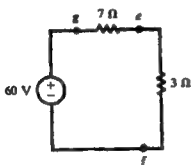
شكل 4-8

$R_{ab}$  ،  $R_{cd}$  على التوازي (شكل 4-9) ليعطى :

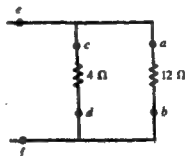
$$R_{ef} = \frac{(4)(12)}{4 + 12} = 3 \Omega$$

وبذلك تكون المقاومة المكافئة 3-Ω على التوالى مع المقاومة 7-Ω (شكل 4-10) وعلى ذلك تكون المقاومة الكلية :

$$R_{eq} = 7 + 3 = 10 \Omega$$



شكل 4-10



شكل 4-9

القدرة الكلية المستهلكة والتي تساوى القدرة الكلية المعطاة من المنبع يمكن حسابها الآن كما يلي :

$$P_T = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{(60)^2}{10} = 360 \text{ W}$$

وهذه القدرة تكون مقسمة بين  $R_{ef}$  ،  $R_{ge}$  كالآلى :

$$P_{ge} = P_{70} = \frac{7}{7+3} (360) = 252 \text{ W} \quad P_{ef} = \frac{3}{7+3} (360) = 108 \text{ W}$$

والقدرة  $P_{ef}$  تنقسم بدورها بين  $R_{ab}$  ،  $R_{cd}$  كالآلى :

$$P_{cd} = \frac{12}{4+12} (108) = 81 \text{ W} \quad P_{ab} = \frac{4}{4+12} (108) = 27 \text{ W}$$

وأخيراً فإن هذه القدرات تنقسم بين كل مقاومة على حدة كالآلى :

$$P_{120} = \frac{6}{12+6} (81) = 27 \text{ W} \quad P_{70} = \frac{7}{7+5} (27) = 15.75 \text{ W}$$

$$P_{60} = \frac{12}{12+6} (81) = 54 \text{ W} \quad P_{50} = \frac{5}{7+5} (27) = 11.25 \text{ W}$$

#### 4.8 التراكب (التجميع)

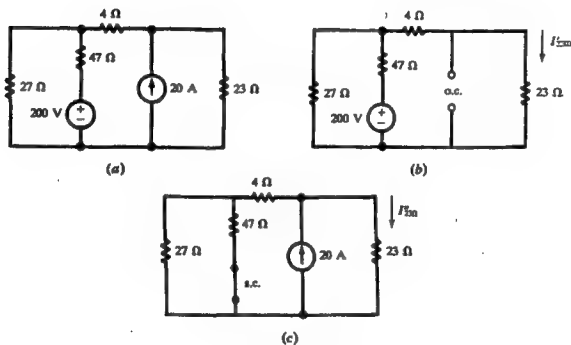
فى الشبكات التى تحتوى على اثنين أو أكثر من المصادر المولدة يمكن تحليلها للحصول على الجهود المختلفة والتيارات الأفرع وذلك باستخدام منبع واحد فى كل مرة ثم عمل تراكب (تجميع) للنتائج . وتستخدم هذه الطريقة أساساً لوجود علاقة خطية بين الجهد والتيار . ومع وجود مصادر تابعة يمكن استخدام طريقة التراكب فقط حينما تكون دوال التحكم خارجة عن الشبكة المحتوية على المصادر حتى لا تتغير المتحكمات عندما نستخدم منبعاً واحداً فى كل مرة . وتُقصّر جميع مصادر الجهد إلا واحداً فى حين تستبدل مصادر التيار بدوائر مفتوحة . ولا يمكن استخدام طريقة التراكب لحساب القدرة لأن القدرة فى أى عنصر تكون متناسبة مع مربع التيار أو مربع الجهد الذى يكون حيثئذ غير خطى .

ولتوضيح أكثر لطريقة التراكب ارجع إلى المعادلة رقم (7) مثال 4-4 .

$$I_1 = V_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left( \frac{\Delta_{21}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left( \frac{\Delta_{31}}{\Delta_R} \right)$$

والذى يحتوى على أساس نظرية التراكب . ولاحظ أن الثلاث حدود اليمنى هى المكونة للتيار  $I_1$  . فإذا وجد منابع فى الشبكات الثلاث فإن التيار  $I$  سيكون ناتجاً من مساهمة كل من وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت الشبيكة 3 تشمل المنبعين  $V_1$  ،  $V_2$  وكلا منهما يساوى صفراً فإن  $I_1$  تحدد تماماً بالحد الثالث .

مثال 4-7: أحسب التيار فى المقاومة  $23\Omega$  المبينة شكل (a) 4-11 باستخدام طريقة التراكب - ومع استخدام المنبع  $200\text{ V}$  بمفرده يستبدل منبع التيار  $20\text{ A}$  بدائرة مفتوحة كما فى شكل (b) 4-11(b).



شكل 4-11

$$R_{eq} = 47 + \frac{(27)(4 + 23)}{54} = 60.5\ \Omega$$

$$I_T = \frac{200}{60.5} = 3.31\text{ A}$$

$$I'_{23\Omega} = \left(\frac{27}{54}\right)(3.31) = 1.65\text{ A}$$



حينما يعمل المنبع 20 A بمفرده فإن المنبع 200 V يستبدل بدائرة قصيرة كما فى شكل 4-11(c).

$$R_{eq} = 4 + \frac{(27)(47)}{74} = 21.15 \Omega$$

Then

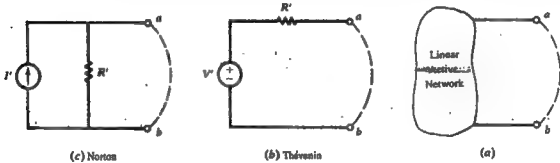
$$I'_{230} = \left( \frac{21.15}{21.15 + 23} \right) (20) = 9.58 \text{ A}$$

التيار الكلى فى المقاومة 23  $\Omega$  يكون :

$$I_{230} = I'_{230} + I'_{230} = 11.23 \text{ A}$$

#### 4.9 نظريتي ثيفينين ونورتون

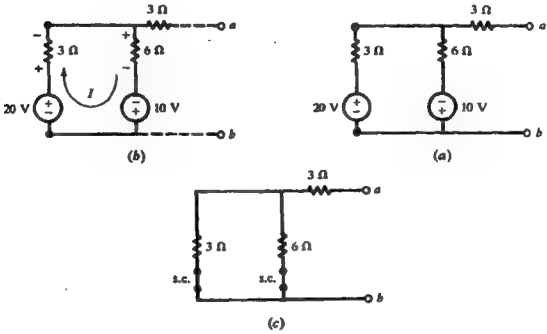
للشبكة الخطية ذات المقاومات والتي تحتوى على منبع أو أكثر للجهد والتيار يمكن استبدالها بمنبع واحد من الجهد ومقاومة على التوالى (نظرية ثيفينين) أو بمنبع واحد للتيار ومقاومة على التوازي (نظرية نورتون). ويسمى الجهد جهد ثيفينين المكافئ  $V'$  والتيار بتيار نورتون المكافئ  $I'$  والمقاومتان لهما نفس الرمز  $R'$ . حينما نفتح الطرفين ab فى شكل 4-12(a) فإنه سيظهر جهد بينهما.



شكل 4-12

من شكل 4-12(b) من المؤكد أن  $V'$  هو جهد ثيفينين لدائرة ثيفينين المكافئة. وإذا قصرنا طرفي الدائرة كما هو مبين بالخط المنقطع فى شكل 4-12(a) فإنه سينشأ تيار. من شكل 4-12(c) من المؤكد أن التيار  $I'$  هو تيار نورتون لدائرة نورتون المكافئة. والآن إذا كان كل من الدائرتان (b)، (c) مكافئ لنفس الشبكة الفعالة فسيكون كل منهما مكافئ للآخر. ويمكن استنتاج أن  $I' = V'/R'$  وإذا أستنتجا كل من  $V'$ ،  $I'$  من الشبكة الفعالة فإن  $R' = V'/I'$ .

مثال 4-8: أوجد دائرتي ثقتين ونورتون المكافئتين للشبكة الفعالة المبينة شكل (a) 4-13.



شكل 4-13

عند فتح الطرفين ab يدفع المنبعان تياراً في اتجاه عقارب الساعة خلال المقاومتين  $3\Omega$  ،  $6\Omega$  كما في شكل (b) 4-13.

$$I = \frac{20 + 10}{3 + 6} = \frac{30}{9} \text{ A}$$

وحيث أنه لا يمر تيار في المقاومة العليا التي على اليمين  $3\Omega$  فإن جهد ثيشين يمكن أن يؤخذ من أي فرع.

$$V_{ab} = V' = 20 - \left(\frac{30}{9}\right)(3) = 10 \text{ V}$$

$$\text{or } V_{ab} = V' = \left(\frac{30}{9}\right)6 - 10 = 10 \text{ V}$$

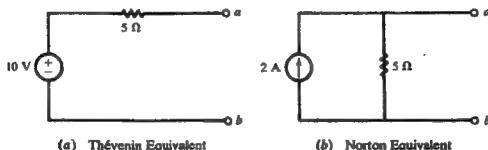
ويمكن الحصول على قيمة  $R'$  بقصر منابع الجهد (شكل (c) 4-13) وإيجاد المقاومة المكافئة للشبكة عند الطرفين ab.

$$R' = 3 + \frac{(3)(6)}{9} = 5 \Omega$$

وعند عمل قصر على الطرفين ينتج التيار  $I_{s.c.}$  من المتبعين وبفرض أنه يمر من a إلى b فإنه ينشأ بنظرية التراكب .

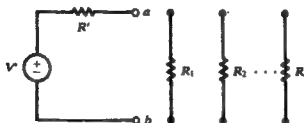
$$I_{s.c.} = I' = \left( \frac{6}{6+3} \right) \left[ \frac{20}{3 + \frac{(3)(6)}{9}} \right] - \left( \frac{3}{3+3} \right) \left[ \frac{10}{6 + \frac{(3)(3)}{6}} \right] = 2 \text{ A}$$

وبين شكل 4-14 الدائرتين المكافئتين وفي حالتنا هذه تم الحصول على  $R'$ ،  $I'$ ،  $V'$  كل على حدة حيث أن كل منهم مرتبط بالآخر بقانون أوم فإنه يمكن استخدام أى قيمتين للحصول على القيمة الثالثة .



شكل 4-14

وتبدو فائدة دوائر ثفينين ونورتون المكافئة حينما تختبر الشبكة الفعالة باستخدام عدة أحمال كل منها يمكن تمثيله بمقاومة وشكل 4-15 يبين ذلك حيث من المؤكد أن المقاومات  $R_1, R_2, \dots, R_n$  يمكن توصيل كل منها على حده فى كل مرة وبذلك يمكن الحصول على التيار والقدرة بسهولة . أما إذا حاولنا عمل ذلك فى الدائرة الأصلية، على سبيل المثال، باستخدام تبسيط الشبكة فإن الحل يكون مطولاً وصعباً ويستغرق وقتاً طويلاً .



شكل 4-15

#### 4.10 نظرية القدرة القصوى المنقولة

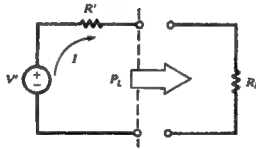
أحياناً يكون المطلوب معرفة أقصى قدرة يمكن نقلها من شبكة فعالة إلى حمل خارجي كمقاومة  $R_L$ . ويفرض أن الشبكة خطية فإنه يمكن تبسيطها إلى دائرة مكافئة كما في شكل 4-16 ومن ثم .

$$I = \frac{V'}{R' + R_L}$$

وبذلك تكون القدرة المستهلكة في الحمل .

$$P_L = \frac{V'^2 R_L}{(R' + R_L)^2} = \frac{V'^2}{4R'} \left[ 1 - \left( \frac{R' - R_L}{R' + R_L} \right)^2 \right]$$

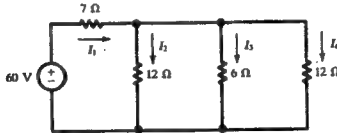
ومن الملاحظ أن القدرة  $R_L$  تصل إلى قيمتها العظمى  $V'^2/4R'$  حينما  $R_L = R'$  في هذه الحالة تكون القدرة في  $R'$  هى أيضاً  $V'^2/4R'$  وبالتالي حينما تكون القدرة المنقولة قيمة عظمى تكون الجودة 50% .



شكل 4-16

#### مسائل محلولة

4-1 استخدم تيار الأفرع في الشبكة المبينة شكل 4-17 لإيجاد التيار المعطى بالمنبع 60 V .



شكل 4-17

قانونا KVL ، KCL يعطيان :

$$I_2(12) = I_3(6) \quad (10)$$

$$I_2(12) = I_4(12) \quad (11)$$

$$60 = I_1(7) + I_2(12) \quad (12)$$

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \quad (13)$$

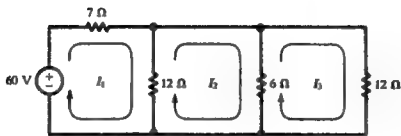
وبالتعويض بالمعادلتين (10) ، (11) في (13) .

$$I_1 = I_2 + 2I_2 + I_2 = 4I_2 \quad (14)$$

والآن نعوض بالمعادلة (14) في المعادلة (12) .

$$60 = I_1(7) + \frac{1}{4}I_1(12) = 10I_1 \quad \text{or} \quad I_1 = 6 \text{ A}$$

4-2 حل المسألة رقم 4-1 بطريقة تيار الشبكة .



شكل 4-18

باستخدام KVL لكل شبكة (انظر شكل 4-18) يتج :

$$60 = 7I_1 + 12(I_1 - I_2)$$

$$0 = 12(I_2 - I_1) + 6(I_2 - I_3)$$

$$0 = 6(I_3 - I_2) + 12I_3$$

ويترتيب الحدود ووضع المعادلات في شكل مصفوفة .

$$\begin{aligned} 19I_1 - 12I_2 &= 60 \\ -12I_1 + 18I_2 - 6I_3 &= 0 \\ -6I_2 + 18I_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 19 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستعمال قانون كرامر لإيجاد  $I_1$  .

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 60 & -12 & 0 \\ 0 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 19 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{17280 + 2880}{17280 + 2880} = 6 \text{ A}$$

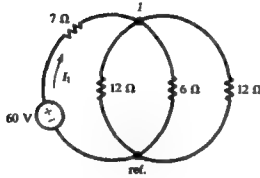
4-3 حل الشبكة للمسألة 4-1 ، 4-2 بطريقة جهد العقدة . انظر شكل 4-19 .

لوجود عقدتين أساسيتين لذا توجد معادلة واحدة .

$$\frac{V_1 - 60}{7} + \frac{V_1}{12} + \frac{V_1}{6} + \frac{V_1}{12} = 0$$

ومنها  $V_1 = 18 \text{ V}$  ومن ثم .

$$I_1 = \frac{60 - V_1}{7} = 6 \text{ A}$$



شكل 4-19

4-4 فى المسألة 4-2 أوجد  $R_{input, 1}$  واستخدمها لحساب  $I_1$  .

$$R_{input, 1} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}} = \frac{2880}{\begin{vmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{2880}{288} = 10 \Omega$$

Then

$$I_1 = \frac{60}{R_{input, 1}} = \frac{60}{10} = 6 \text{ A}$$

4-5 أوجد  $R_{transfer, 12}$  ،  $R_{transfer, 13}$  للشبكة بالمسألة 4-2 واستخدمها لحساب كل من  $I_2$  ،  $I_3$  .

المعاملات فى الحدود أرقام 1 ، 2 فى  $\Delta_R$  يجب أن تحتوى على إشارة سالبة .

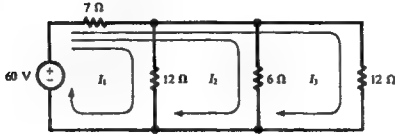
$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = 216 \quad R_{transfer, 12} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{12}} = \frac{2880}{216} = 13.33 \Omega$$

Then,  $I_2 = 60/13.33 = 4.50 \text{ A}$ .

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -12 & 18 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 72 \quad R_{transfer, 13} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{13}} = \frac{2880}{72} = 40 \Omega$$

Then,  $I_3 = 60/40 = 1.50 \text{ A}$ .

4-6 حل المسألة رقم 4-1 باستخدام التيار الحلقى المين فى شكل 4-20.



شكل 4-20

نحصل على عناصر المصفوفة من المعادلات التى يمكن إيجادها بمجرد النظر واتباع قوانين

بند 4-2.

$$\begin{bmatrix} 19 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Thus

$$\Delta_R = \begin{bmatrix} 19 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 19 \end{bmatrix} = 2880$$

لاحظ أن فى المسألة 4-2 أيضاً  $\Delta_R = 2880$  بالرغم من أن العناصر فى المحدد مختلفة. وأن جميع الشبكات أو الحلقات تؤدي إلى نفس القيمة للمحدد  $\Delta_R$ . وتكون محددات البسط الثلاث هى:

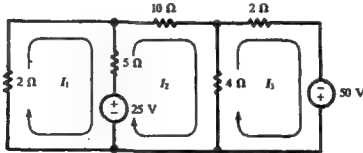
$$N_1 = \begin{vmatrix} 60 & 7 & 7 \\ 60 & 13 & 7 \\ 60 & 7 & 19 \end{vmatrix} = 4320 \quad N_2 = 8642 \quad N_3 = 4320$$

وبالتالى

$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta_R} = \frac{4320}{2880} = 1.5 \text{ A} \quad I_2 = \frac{N_2}{\Delta_R} = 3 \text{ A} \quad I_3 = \frac{N_3}{\Delta_R} = 1.5 \text{ A}$$

التيار الذى يعطيه المنبع 60 V هو مجموع الثلاث تيارات الحلقة  $I_1 + I_2 + I_3 = 6 \text{ A}$ .

4-7 أكتب معادلة مصفوفة تيار الشبكة للشبكة المبينة شكل 4-21 بمجرد النظر وحلها لإيجاد قيم التيارات.



شكل 4-21

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Solving,

$$I_1 = \begin{vmatrix} -25 & -5 & 0 \\ 25 & 19 & -4 \\ 50 & -4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = (-700) + 536 = -1.31 \text{ A}$$

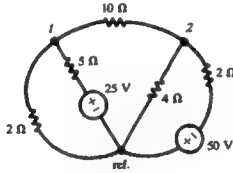
Similarly,

$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta_R} = \frac{1700}{536} = 3.17 \text{ A} \quad I_3 = \frac{N_3}{\Delta_R} = \frac{5600}{536} = 10.45 \text{ A}$$

4-8 حل المسألة رقم 4-7 بطريقة جهد العقدة .

ترسم الدائرة مرة أخرى كما في شكل 4-22 باعتبار وجود عقدتان أساسيتان هما 1 ، 2 والعقدة الثالثة تختار كعقدة مقارنة باستخدام KCL يجب أن يكون محصلة التيار الخارجة من العقدة 1 صفراً .

$$\frac{V_1}{2} + \frac{V_1 - 25}{5} + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0$$



شكل 4-22

وبالمثل عند العقدة 2 .

$$\frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{4} + \frac{V_2 + 50}{2} = 0$$

ويوضع المعادلتين في شكل المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -25 \end{bmatrix}$$



ويكون محدد المعاملات ومحددات البسط كما يلي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0.80 & -0.10 \\ -0.10 & 0.85 \end{vmatrix} = 0.670$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 5 & -0.10 \\ -25 & 0.85 \end{vmatrix} = 1.75 \quad N_2 = \begin{vmatrix} 0.80 & 5 \\ -0.10 & -25 \end{vmatrix} = -19.5$$

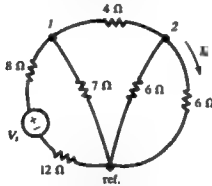
ومنها،

$$V_1 = \frac{1.75}{0.670} = 2.61 \text{ V} \quad V_2 = \frac{-19.5}{0.670} = -29.1 \text{ V}$$

وبدلالة هذه الجهود تحدد قيمة التيارات في شكل 4-21 بالتالي .

$$I_1 = \frac{-V_1}{2} = -1.31 \text{ A} \quad I_2 = \frac{V_1 - V_2}{10} = 3.17 \text{ A} \quad I_3 = \frac{V_2 + 50}{2} = 10.45 \text{ A}$$

4-9 للشبكة المينة في الشكل 4-23 أوجد  $V_s$  التي تجعل  $I_0 = 7.5 \text{ mA}$ .



شكل 4-23

نستخدم طريقة جهد العقدة ويمكن كتابة المعادلات في شكل مصفوفة كما يلي :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s/20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ويالحل لإيجاد  $V_s$ .

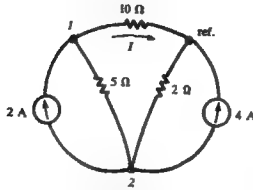
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.443 & V_s/20 \\ -0.250 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.443 & -0.250 \\ -0.250 & 0.583 \end{vmatrix}} = 0.0638 V_s$$

Then

$$7.5 \times 10^{-3} = I_0 = \frac{V_2}{6} = \frac{0.0638 V_s}{6}$$

from which  $V_s = 0.705 \text{ V}$ .

4-10 فى الشبكة المبينة شكل 4-24 أوجد التيار المار فى المقاومة  $10\text{-}\Omega$  .



شكل 4-24

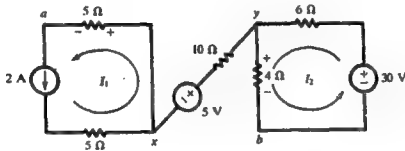
تكتب معادلات العقد فى شكل مصفوفة بمجرد النظر كالتالى :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -0.20 \\ -6 & 0.70 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.30 & -0.20 \\ -0.20 & 0.70 \end{vmatrix}} = 1.18 \text{ V}$$

Then,  $I = V_1 / 10 = 0.118 \text{ A}$ .

4-11 أوجد الجهد  $V_{ab}$  فى الشبكة الموضحة فى شكل 4-25.



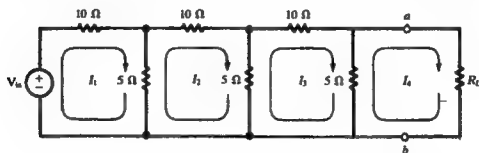
شكل 4-25

الحلقتان المغلقتان بالشكل لا تعتمد أى منهما على الأخرى وبالتالي لا يمر تيار خلال الفرع الواصل بينهما .

$$I_1 = 2 \text{ A} \quad I_2 = \frac{30}{10} = 3 \text{ A}$$

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = -I_1(5) - 5 + I_2(4) = -3 \text{ V}$$

4-12 للشبكة السُلامية المبينة شكل 4-26 أوجد مقاومة الانتقال بدلالة النسبة بين  $V_{in}$  إلى  $I_4$ .



شكل 4-26

بمجرد النظر تكون معادلة الشبكة.

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 20 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 + R_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_R = 5125 R_L + 18750$$

$$N_4 = 125V_{in}$$

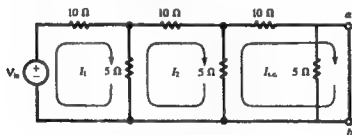
$$I_4 = \frac{N_4}{\Delta_R} = \frac{V_{in}}{41R_L + 150} \text{ (A)}$$

and

$$R_{transfer, 14} = \frac{V_{in}}{I_4} = 41R_L + 150 \text{ (}\Omega\text{)}$$

4-13 أوجد مكافئ ثيفين للدائرة المبينة شكل 4-26 على يسار الطرفان ab.

نحصل على تيار القصر  $I_{s.c.}$  من الثلاث شبكات بالدائرة المبينة شكل 4-27.

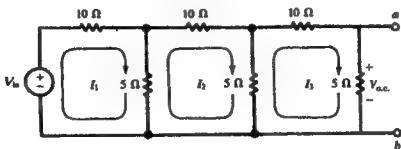


شكل 4-27

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_{s.c.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{s.c.} = \frac{V_{in} \begin{vmatrix} -5 & 20 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}}{\Delta_R} = \frac{V_{in}}{150}$$

جهد الدائرة المفتوحة  $V_{o.c.}$  هو الجهد على طرفي المقاومة  $5\Omega$  المبينة في شكل 4-28.



شكل 4-28

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \frac{25V_{in}}{5125} = \frac{V_{in}}{205} \quad (A)$$

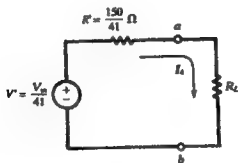
وبذلك يكون جهد ثغين  $V' = V_{o.c.} = I_3 (5) = V_{in} / 41$  ومنها :

$$R_{Th} = \frac{V_{o.c.}}{I_{s.c.}} = \frac{150}{41} \Omega$$

الدائرة المكافئة مبينة بشكل 4-29 وتوصيل المقاومة  $R_L$  للطرفين ab فإن تيار الخرج يكون :

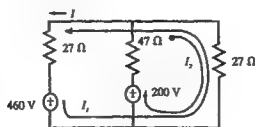
$$I_s = \frac{V_{in}/41}{(150/41) + R_L} = \frac{V_{in}}{41R_L + 150} \quad (A)$$

والتي تتفق مع المسألة 4-12.



شكل 4-29

4-14 باستخدام طريقة التراكب أوجد قيمة التيار  $I$  لكل جهد منبع في الدائرة المبينة شكل 4-30.



شكل 4-30

نختار تيار الحلقات بحيث يكون لكل منبع تيار واحد.

$$\begin{bmatrix} 54 & -27 \\ -27 & 74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -460 \\ 200 \end{bmatrix}$$

ومن المنبع 460 V.

$$I_1' = I'' = \frac{(-460)(74)}{3267} = -10.42 \text{ A}$$

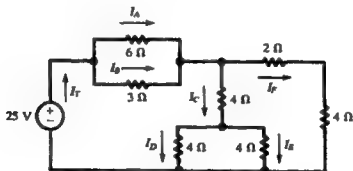
ومن المنبع 200 V.

$$I_1'' = I'' = \frac{-(200)(-27)}{3267} = 1.65 \text{ A}$$

Then,

$$I = I' + I'' = -10.42 + 1.65 = -8.77 \text{ A}$$

4-15 أوجد التيار في كل مقاومة شكل 4-31(a) باستخدام طريقة تبسيط الشبكة.

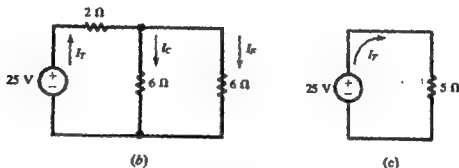


شكل 4-31(a)

الخطوة الأولى هي تحويل كل مقاومتين على التوازي إلى ما يكافئهما فبالنسبة للمقاومتين  $6\Omega$ ،

$3\Omega$  المقاومة المكافئة لهما  $R_{eq} = (6)(3) / (6 + 3) = 2\Omega$  والمقاومتين  $4\Omega$  على التوازي المقاومة

المكافئة لهما  $R_{eq} = 2\Omega$  وترسم الدائرة مرة أخرى مع وجود مقاومات التوالى شكل (b) 4-31 وفى هذه الحالة نجد أن مقاومتي التوازي  $6\Omega$  لهما المقاومة المكافئة  $R_{eq} = 3\Omega$  وهى بدورها على التوالى مع المقاومة  $2\Omega$  وبذلك تكون المقاومة الكلية  $R_T = 5\Omega$  كما هو مبين فى شكل (c) 4-31. والتيار الكلى يكون:



شكل 4-31 (cont.)

$$I_T = \frac{25}{5} = 5 \text{ A}$$

وبالتالى يمكن حساب تيارات الأفرع بالرجوع إلى دوائر شكل (b) 4-31 وشكل (a) 4-31.

$$I_C = I_T = \frac{1}{2} I_T = 2.5 \text{ A}$$

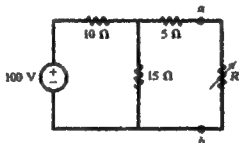
$$I_D = I_E = \frac{1}{2} I_C = 1.25 \text{ A}$$

$$I_A = \frac{3}{6+3} I_T = \frac{5}{3} \text{ A}$$

$$I_B = \frac{6}{6+3} I_T = \frac{10}{3} \text{ A}$$

4-16 أوجد قيمة المقاومة المتغيرة التى تنتج عن أكبر قدرة منقولة عند الطرفين ab للدائرة المبينة شكل

4-32.



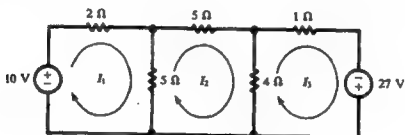
شكل 4-32

تحصل أولاً على الدائرة المكافئة لثيفين حيث  $R' = 11\Omega$  ،  $V' = 60\text{ V}$  وبالرجوع لبند 4-10 نجد أن القدرة المنقولة تكون أكبر ما يمكن عند  $R = R' = 11\Omega$

$$P_{\max} = \frac{V'^2}{4R'} = 81.82\text{ W}$$

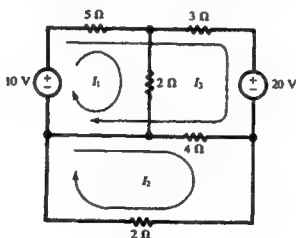
### مسائل إضافية

4-17 استخدم طريقة تيار الشبكة للشبكة المبينة شكل 4-33 واكتب معادلات المصفوفة بمجرد النظر وأوجد التيار  $I_1$  بفك محدد البسط بالنسبة للعمود المحتوى على منابع الجهد لتبين أن كل منبع يغذى تياراً قيمته 2.13 A.



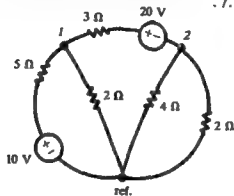
شكل 4-33

4-18 بالنسبة لتيارات الحلقة المبينة فى الشبكة فى الشكل 4-34 أكتب معادلة المصفوفة وأوجد قيمة التيارات الثلاثة . الجواب 3.55 A , - 1.98 A , - 2.98 A



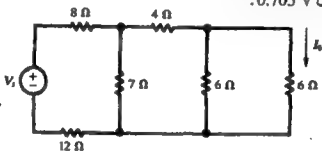
شكل 4-34

4-19 الشبكة فى المسألة 4-18 رسمت مرة أخرى فى شكل 4-35 وذلك لحلها بطريقة جهد العقدة .  
أوجد جهدى العقدة  $V_1$  ،  $V_2$  وتحقق من نتائج التيارات فى المسألة 4-18 .  
الجواب  $7.11 \text{ V}$  ,  $-3.96 \text{ V}$  .



شكل 4-35

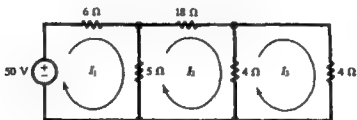
4-20 فى الشبكة المبينة شكل 4-36 كان التيار  $I_0 = 7.5 \text{ mA}$  استخدم تيارات الشبكة لإيجاد قيمة جهد المنبع  $V_s$  .  
الجواب  $0.705 \text{ V}$  .



شكل 4-36

4-21 استخدم المحددات المناسبة فى المسألة 4-20 للحصول على مقاومة الدخل كما تبدو لجهد المنبع  $V_s$  . تأكد من النتائج باستخدام تبسيط الشبكة .  
الجواب  $23.5\Omega$  .  
4-22 للشبكة المبينة شكل 4-36 أوجد مقاومة الانتقال التى تنسب التيار  $I_0$  لجهد المنبع  $V_s$  .  
الجواب  $94.0\Omega$  .

4-23 الشبكة المبينة شكل 4-37 . أوجد تيارات الشبكة .  
الجواب  $5.0 \text{ A}$  ,  $1.0 \text{ A}$  ,  $0.5 \text{ A}$  .

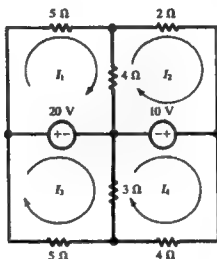


شكل 4-37



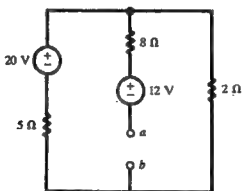
4-24 باستخدام المصفوفات للمسألة 4-23 أحسب  $R_{input, 1}$  ،  $R_{transfer, 12}$  ،  $R_{transfer, 13}$  .  
الجواب  $10 \Omega$  ،  $50 \Omega$  ،  $100 \Omega$  .

4-25 في الشبكة المبينة شكل 4-38 . أوجد تيارات الشبكة الأربعة . الجواب -  $2.11 \text{ A}$  ,  $-0.263 \text{ A}$  ,  $2.34 \text{ A}$  ,  $-0.426 \text{ A}$  .



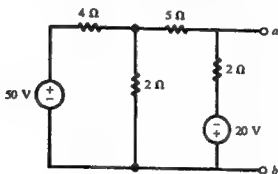
شكل 4-38

4-26 في الدائرة المبينة شكل 4-39 . أوجد  $V_{o.c.}$  ،  $I_{sc.}$  ،  $R'$  عند الطرفين  $a$  و  $b$  باستخدام تيار الشبكة أو باستخدام جهد العقدة اعتبر الطرف  $a$  موجب بالنسبة للطرف  $b$  . الجواب  $-6.29 \text{ V}$  ,  $-0.667 \text{ A}$  ,  $9.44 \Omega$  .



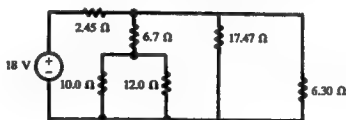
شكل 4-39

4-27 استخدم طريقة جهد العقدة للحصول على  $V_{o.c.}$  ،  $I_{s.c.}$  عند الطرفين  $ab$  للشبكة المبينة بشكل 4-40 . اعتبر الطرف  $a$  موجب بالنسبة للطرف  $b$  . الجوال  $11.2 \text{ V}$  ,  $-7.37 \text{ A}$  .



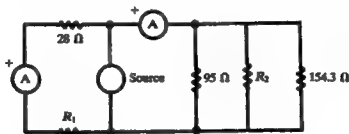
شكل 4-40

4-28 استخدم طريقة تبسيط الشبكة للحصول على التيار في كل مقاومة للدائرة المبينة شكل 4-41 . الجواب في المقاومة  $2.45\Omega$  ؛ التيار  $3.10 \text{ A}$  ؛  $6.7\Omega$  ؛  $0.885 \text{ A}$  ؛  $10.0\Omega$  ؛  $0.466 \text{ A}$  ؛  $12.0\Omega$  ،  $0.389 \text{ A}$  ؛  $17.47\Omega$  ؛  $0.595 \text{ A}$  ؛  $6.30\Omega$  ؛  $1.65 \text{ A}$  .



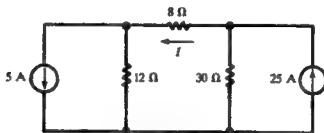
شكل 4-41

4-29 كلا الأميرومتران يقرأ  $1.70 \text{ A}$  في الدائرة المبينة شكل 4-42 . فإذا كان المنبع يغذى قدرة قيمتها  $300 \text{ W}$  للدائرة . أوجد كل من  $R_1$  ،  $R_2$  . الجواب  $443.0\Omega$  ،  $-23.9\Omega$  .



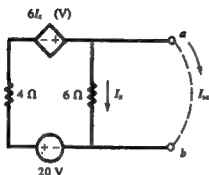
شكل 4-42

4-30 في الشبكة المبينة شكل 4-43 كان تيار المنبعين هما  $I'$ ،  $I''$  حيث  $I' + I'' = I$ . استخدم طريقة التراكب للحصول على هذه التيارات. الجواب  $1.2 \text{ A}$ ،  $15.0 \text{ A}$ ،  $16.2 \text{ A}$ .

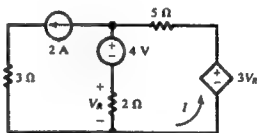


شكل 4-43

4-31 أوجد التيار  $I$  في الشبكة المبينة في الشكل 4-44. الجواب  $12 \text{ A}$ .



شكل 4-45

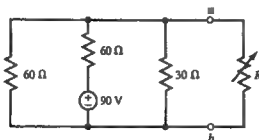


شكل 4-44

4-32 أوجد مكافئ ثغتين ونورتون للشبكة المبينة شكل 4-45.

الجواب  $V' = 30 \text{ V}$ ،  $I' = 5 \text{ A}$ ،  $R' = 6 \Omega$ .

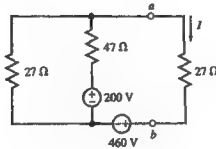
4-33 أوجد أقصى قدرة منقولة التي تعطيها الشبكة الفعالة على يسار الطرفان  $ab$  وذلك للمقاومة المتغيرة  $R$  المبينة شكل 4-46. الجواب  $8.44 \text{ W}$ .



شكل 4-46

4-34 إذا كان جهد مولد تيار مستمر يعمل في حالة عدم الحمل هو  $120 \text{ V}$  . وحينما يغذى بحمل مقنن يكون التيار  $40 \text{ A}$  والجهد ينخفض إلى  $112 \text{ V}$  أوجد مكافئات ثقتين ونورتون . الجواب  $R' = 0.2 \Omega$  ،  $I = 600 \text{ A}$  ،  $V' = 120 \text{ V}$

4-35 الشبكة التي في مسألة 4-14 رسمت مرة أخرى في شكل 4-47 وأضيف الطرفان  $a$  ،  $b$  . بسط الشبكة على يسار  $ab$  بالدائرة المكافئة لثقتين أو نورتون وحل المسألة للحصول على التيار  $I$  . الجواب  $8.77 \text{ A}$



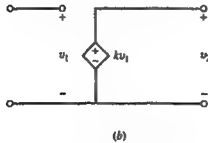
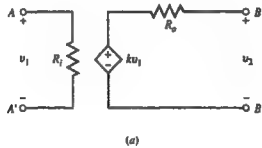
شكل 4-47

## الفصل الخامس

### دوائر المكبرات ومكبرات التشغيل

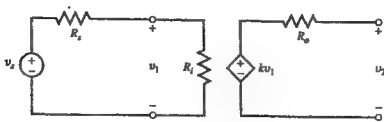
#### 5.1 تمثيل المكبر :

المكبر هو نيطة تكبير الإشارات . وقلب المكبر هو منيع متحكم فيه بإشارة دخل . والشكل المبسط لمكبر جهد هو كاليمين فى شكل 5-1(a) . وغالباً ما يتم توصيل طرفى المقارنة للدخل والخرج معاً ليكونا طرف مقارنة واحد . وحينما يكون طرف الخرج مفتوحاً نحصل على  $v_2 = kv_1$  حيث  $k$  وهو معامل التضخيف ويسمى كسب الدائرة المفتوحة والمقاومتان  $R_0$  ،  $R_i$  هما مقاومتى الدخل والخرج للمكبر على الترتيب . وللأداء الأفضل يكون من المرغوب أن تكون  $R_i$  كبيرة ،  $R_0$  صغيرة . وفى المكبر المثالى  $R_0 = 0$  ،  $R_i = \infty$  كما فى شكل 5-1(b) . وأى تغيير فى الحالات السابقة يقلل من الكسب الكلى .



شكل 5-1

مثال 5-1: منبع جهد عملى (واقعى)  $v_s$  له مقاومة داخلية  $R_s$  متصلاً بطرفى الدخل لمكبر جهد له مقاومة داخلية  $R_i$  كما فى شكل 5-2. أوجد  $v_2/v_1$ .



شكل 5-2

نحصل على جهد الدخل  $v_1$  للمكبر بتقسيم  $v_s$  بين  $R_i$ ،  $R_s$ .

$$v_1 = \frac{R_i}{R_i + R_s} v_s$$

جهد الخرج  $v_2$  هو :

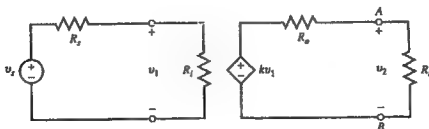
$$v_2 = kv_1 = \frac{kR_i}{R_i + R_s} v_s$$

ومنها

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{R_i}{R_i + R_s} k \quad (1)$$

ويحمل المكبر جهد المنبع ويقل كسب الدائرة المفتوحة بالمعامل  $R_i / (R_i + R_s)$ .

مثال 5-2: شكل 5-3 يوضح منبع عملى للجهد  $v_s$  ذو مقاومة داخلية  $R_s$  يغذى الحمل  $R_L$  خلال مكبر له مقاومتي دخل وخرج  $R_i$ ،  $R_o$ .



شكل 5-3

بتقسيم الجهد

$$v_1 = \frac{R_i}{R_i + R_s} v_s$$

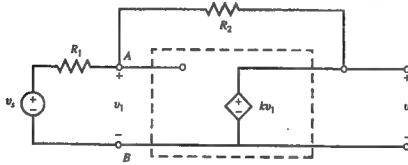
وبالمثل يكون جهد الخرج

$$v_2 = kv_1 \frac{R_i}{R_i + R_o} = k \frac{R_i R_i}{(R_i + R_s)(R_i + R_o)} v_s \quad \text{or} \quad \frac{v_2}{v_s} = \frac{R_i}{R_i + R_s} \times \frac{R_i}{R_i + R_o} k \quad (2)$$

لاحظ أن كسب الدائرة المفتوحة يقل مرة أخرى بمعامل إضافي هو  $R_i / (R_i + R_o)$  الذي يجعل جهد الخرج معتمداً على الحمل .

## 5.2 التغذية الخلفية في دوائر المكبرات :

يمكن التحكم في كسب المكبر بتغذية خلفية بجزء من الخرج للدخل كما يحدث في المكبر المثالي شكل 5-4 خلال مقاومة التغذية الخلفية  $R_2$  . ونسبة التغذية الخلفية  $R_1 / (R_1 + R_2)$  تؤثر في الكسب الكلي وتجعل المكبر أقل حساسية للتغيرات في قيمة  $k$  .



شكل 5-4

مثال 5-3: أوجد  $v_2/v_s$  في شكل 5-4 وعبر عنها كدالة للنسبة  $b = R_1 / (R_1 + R_2)$  .  
نعرف من المكبر أن :

$$v_2 = kv_1 \quad \text{or} \quad v_1 = v_2/k \quad (3)$$

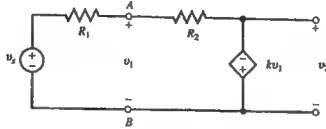
وباستخدام KCL عند العقدة A

$$\frac{v_1 - v_s}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \quad (4)$$

عوض عن  $v_1$  من (3) في المعادلة (4)

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{R_2 k}{R_2 + R_1 - R_1 k} = (1 - b) \frac{k}{1 - bk} \quad \text{where } b = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

مثال 5-4: في شكل 5-5،  $R_2 = 5k\Omega$ ،  $R_1 = 1k\Omega$ ، أوجد (أ)  $v_2/v_s$  كدالة للكسب  $k$  للدائرة المفتوحة. (ب) أحسب  $v_2/v_s$  لقيم  $k = 100$ ،  $k = 1000$  وناقش الإجابات.



شكل 5-5

(أ) يختلف الشكلان 5-4، 5-5 في قطبية منبع الجهد التابع. لإيجاد  $v_2/v_s$  استخدم النتائج التي في مثال 5-3 وغير  $k$  لتكون  $-k$  في (5).

$$\frac{v_2}{v_s} = (1 - b) \frac{-k}{1 + bk} \quad \text{where } b = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{6}$$

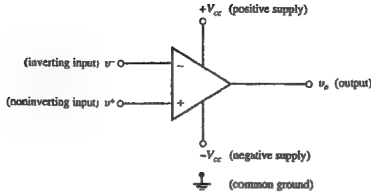
$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-5k}{6 + k}$$

(ب) عند  $k = 100$ ،  $v_2/v_s = 4.72$ ، عند  $k = 1000$ ،  $v_2/v_s = -4.97$ . ولذلك نلاحظ أن زيادة  $k$  لعشرة أمثال ينتج فقط 5.3% تغير في  $v_2/v_s$  أي أنه  $(4.97 - 4.72) / 4.72 = 5.3\%$ . لاحظ أن للقيم الكبيرة في الثابت  $k$  تقرب  $v_2/v_s$  من  $-R_2/R_1$  والتي لا تعتمد على قيمة  $k$ .

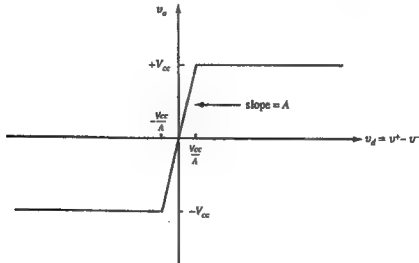
### 5.3 مكبر التشغيل

مكبر التشغيل (op amp) هو نبيلة بطرفي دخل يرمز لهما بالرمز +، - أو بالطرف الغير عاكس والطرف العاكس على الترتيب. وتتصل أيضاً النبيلة بمنبع قدرة تيار مستمر ( $+V_{cc}$ ،  $-V_{cc}$ ). والطرف المشترك وهو طرف المقارنة للدخل والخرج ومنبع القدرة يوصل في خارج المكبر بالأرض كما في شكل 5-6.





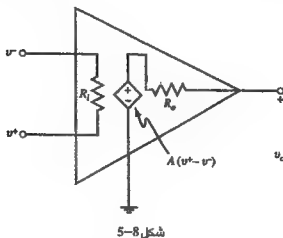
يعتمد جهد الخرج  $v_o$  على  $v_d = v^+ - v^-$ . وبإهمال التأثيرات السعوية تكون دالة التحويل هي المبينة بشكل 5-7. فى المجال الخطى  $v_o = Av_d$  ويكون الكسب  $A$  للدائرة المفتوحة كبيراً جداً غالباً. وتتبع  $v_o$  عند نهايتى قيم  $+V_{cc}$ ،  $-V_{cc}$  حينما يزيد جهد الدخل  $v_d$  عن المستوى الخطى أى أن  $|v_d| > V_{cc}/A$ .



شكل 5-8 يبين تمثيل مكبر تشغيل فى المجال الخطى مع حذف توصيلات منبع القدرة للتبسيط. وعملياً تكون  $R_i$  كبيرة، و  $R_o$  صغيرة، و  $A$  تتراوح بين  $10^5$  إلى بضعة ملايين. وتمثيل المكبر فى شكل 5-8 يفى بالغرض طالما أن الخرج يبقى بين  $+v_{cc}$  و  $-v_{cc}$  وقيمة  $V_{cc}$  غالباً ما تكون بين 5، 18 V.

مثال 5-5: في مكبر التشغيل المبين في شكل 5-8،  $V_{cc} = 15 \text{ V}$ ،  $A = 10^5$ ،  $v^- = 0$ ، أوجد الحد الأعلى لقيم  $v^+$  للتشغيل الخطي.

$$|v_o| = |10^5 v^+| < 15 \text{ V} \quad |v^+| < 15 \times 10^{-5} \text{ V} = 150 \mu\text{V}$$



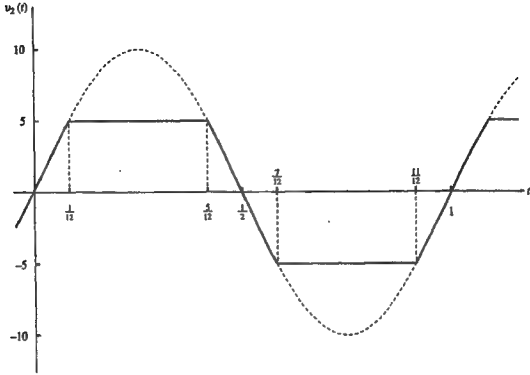
مثال 5-6: في مكبر التشغيل شكل 5-8،  $V_{cc} = 5 \text{ V}$ ،  $A = 10^5$ ،  $v^- = 0$ ،

أوجد وارسم جهد خرج الدائرة المفتوحة  $v_o$ ،  $v^+ = 100 \sin 2\pi t \text{ } (\mu\text{V})$ .

دخل مكبر التشغيل هو  $v_d = v^+ - v^- = (100 \sin 2\pi t) \times 10^{-6} \text{ (V)}$ .

وحيثما يعمل مكبر التشغيل في الفترة الخطية تكون  $v_o = 10^5 v_d = 10 \sin 2\pi t \text{ (V)}$  ويبقى الخرج ثابتاً بين القيمتين  $+5\text{V}$ ،  $-5\text{V}$  كما في شكل 5-9. ويبدأ التشبع حينما  $v_o = 10 \sin 2\pi t$  تصل إلى المستوى  $5\text{V}$ . وهذا يحدث عند  $t = 1/12\text{s}$ . وتنتهي فترة التشبع وتقل قيمة الخرج عن  $5\text{V}$  عند  $t = 5/12\text{s}$ . وبالمثل يحدث التشبع في نصف الوجه السالب في الفترة  $t = 7/12\text{s}$  إلى  $t = 11/12\text{s}$  ويكون الخرج خلال دورة كاملة في الفترة من  $t = 0$  إلى  $t = 1\text{s}$  كما يلي:

$$v_o = \begin{cases} 5 & 1/12 < t < 5/12 \\ -5 & 7/12 < t < 11/12 \\ 10 \sin 2\pi t & \text{otherwise} \end{cases}$$



شكل 9-5

مثال 5-7: كرر مثال 5-6 لقيم  $v^+ = 50 \sin 2\pi t$  ،  $v^- = 25 \mu V$

$$v_d = v^+ - v^- = (50 \sin 2\pi t)10^{-6} - 25 \times 10^{-6} = 50 \times 10^{-6}(\sin 2\pi t - 1/2) \text{ (V)}$$

يكون خرج مكبر التشغيل في المنطقة الخطية كالتالي :

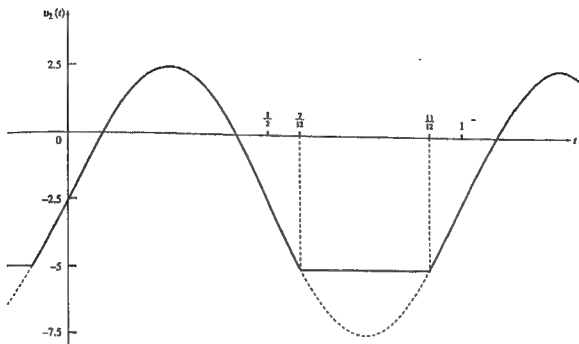
$$v_o = 10^4 v_d = 5(\sin 2\pi t - 1/2) \text{ (V)}$$

يتشبع الجهد  $v_o$  عند المستوى  $-5V$  حينما  $-5 < 5(\sin 2\pi t - 1/2) < -5$  ،  $7/12 < t < 11/12$  كما في

شكل 10-5.

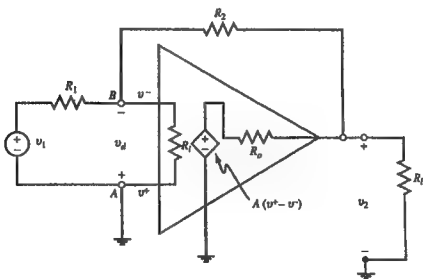
ويكون الخرج خلال دورة واحدة كاملة للجهد  $v_o$  بالفولت في الفترة من  $t = 0$  إلى  $t = 4s$  هي :

$$v_o = \begin{cases} -5 & 7/12 < t < 11/12 \\ 5(\sin 2\pi t - 1/2) & \text{otherwise} \end{cases}$$



شكل 5-10

مثال 5-8: في شكل 5-11،  $A = 10^5$ ،  $R_0 = 0$ ،  $R_1 = 500k\Omega$ ،  $R_2 = 10k\Omega$ ، أوجد  $-v_2/v_1$ .  
افترض أن المكبر لا يصل للتشبع.



شكل 5-11

مجموع التيارات عند العقدة B يساوى صفراً. لاحظ أن  $v_A = 0$  ،  $v_B = -v_d$  لذلك :

$$\frac{v_1 + v_d}{10} + \frac{v_d}{500} + \frac{v_2 + v_d}{50} = 0 \quad (6)$$

وحيث أن  $R_0 = 0$  فإن :

$$v_2 = Av_d = 10^3 v_d \quad \text{or} \quad v_d = 10^{-3} v_2 \quad (7)$$

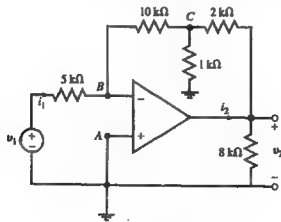
وبالتعويض عن  $v_d$  من (7) في المعادلة (6) فإن النسبة  $v_2/v_1$  تكون :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-5}{1 + 10^{-3} + 5 \times 10^{-3} + 0.1 \times 10^{-3}} = -5$$

#### 5.4 تحليل الدوائر المحتوية على مكبر تشغيل مثالي

في مكبر التشغيل المثالي نجد أن كلا من  $A$  ،  $R_i$  تكون ما لا نهاية وقيمة  $R_0$  صفراً ولذلك فإن مكبر التشغيل لا يسحب تياراً من الطرف العاكس أو الغير عاكس للدخل وفي حالة عدم التشبع يكون هذان الدخلان لهما نفس الجهد. في هذا الباب سنفترض أن مكبرات التشغيل مثالية وتعمل في المنطقة الخطية إلا إذا ذكر خلاف ذلك.

**مثال 5-9:** في مكبر التشغيل المثالي المبين شكل 5-12 أوجد (أ)  $v_2/v_1$  ، (ب) مقاومة الدخل  $v_1/i_1$  ، (ج)  $i_2$  ،  $i_1$  ،  $p_1$  (القدرة المعطاة هي عن طريق  $v_1$ ) ،  $p_2$  (القدرة المستهلكة في المقاومات) إذا كان الجهد  $v_1 = 0.5V$ . علماً بأن المكبر لا يصل إلى حالة التشبع.



شكل 5-12

(أ) الطرف A الغير عاكس متصل بالأرض وبذلك  $v_A = 0$  . وحيث أن مكبر التشغيل مثالى ولا يصل إلى حالة التشبع فإن  $v_B = 0$  . بتطبيق KCL عند العقدتين B ، C وبملاحظة أن مكبر التشغيل لا يسحب تياراً .

$$\text{Node B:} \quad \frac{v_1}{5} + \frac{v_C}{10} = 0 \quad \text{or} \quad v_C = -2v_1 \quad (8)$$

$$\text{Node C:} \quad \frac{v_C}{10} + \frac{v_C}{1} + \frac{v_C - v_2}{2} = 0 \quad \text{or} \quad v_2 = 3.2v_C \quad (9)$$

وبالتعويض بقيمة  $v_C$  من المعادلة (8) فى المعادلة (9) .

$$v_2 = -6.4v_1 \quad \text{or} \quad v_2/v_1 = -6.4$$

(ب) حيث أن  $v_B = 0$  ،  $i_1 = v_1/5000$  ومن ذلك تكون

$$v_1/i_1 = 5k\Omega \text{ مقاومة الدخل}$$

$$(ج) \text{ تيار الدخل } i_1 = v_1/5000 = 0.1 \text{ mA} , v_1 = 0.5V , i_1 = v_1/5000$$

لإيجاد التيار  $i_2$  نطبق KCL عند خرج مكبر التشغيل .

$$i_2 = \frac{v_2}{8000} + \frac{v_2 - v_C}{2000}$$

$$\text{ومن الجزء (أ) } v_C = -1V , v_2 = -3.2V \text{ وبالتالى } i_2 = 1.5 \text{ mA}$$

القدرة المعطاة بالمنبع  $v_1$  هى :

$$p_1 = v_1 i_1 = v_1^2 / 5000 = 50 \times 10^{-6} \text{ W} = 50 \mu\text{W}$$

وتكون القدرات فى المقاومات هى :

$$1 \text{ k}\Omega: \quad p_{1 \text{ k}\Omega} = v_C^2 / 1000 = 0.001 \text{ W} = 1000 \mu\text{W}$$

$$2 \text{ k}\Omega: \quad p_{2 \text{ k}\Omega} = (v_2 - v_C)^2 / 2000 = 0.00242 \text{ W} = 2420 \mu\text{W}$$

$$5 \text{ k}\Omega: \quad p_{5 \text{ k}\Omega} = v_1^2 / 5000 = 0.00005 \text{ W} = 50 \mu\text{W}$$

$$8 \text{ k}\Omega: \quad p_{8 \text{ k}\Omega} = v_2^2 / 8000 = 0.00128 \text{ W} = 1280 \mu\text{W}$$

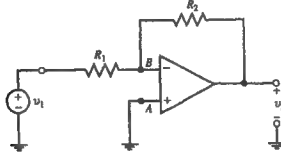
$$10 \text{ k}\Omega: \quad p_{10 \text{ k}\Omega} = v_C^2 / 10000 = 0.0001 \text{ W} = 100 \mu\text{W}$$

القدرة الكلية المستهلكة في جميع المقاومات هي :

$$P_T = P_{1k\Omega} + P_{2k\Omega} + P_{5k\Omega} + P_{8k\Omega} + P_{10k\Omega} = 1000 + 2420 + 50 + 1280 + 100 = 4850 \mu W$$

### 5.5 دائرة المكبر العاكس

في دائرة المكبر العاكس يتم توصيل طرف إشارة الدخل عن طريق المقاومة  $R_1$  إلى الطرف العاكس لمكبر التشغيل ونوصل طرف الخرج عن طريق مقاومة تغذية خلفية  $R_2$  بالطرف العاكس أيضاً . ويتم توصيل الطرف الغير عاكس بالأرض كما في شكل 5-13 .



شكل 5-13

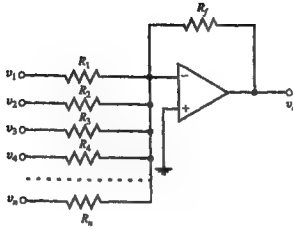
للمحصول على الكسب  $v_2/v_1$  استخدم KCL للتيارات عند العقدة B .

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{v_2}{v_1} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (10)$$

ويكون الكسب سالباً وتحدد قيمته باختيار قيم المقاومات فقط . ومقاومة الدخل للدائرة هي  $R_1$  .

### 5.6 دائرة المكبر الجامع :

يمكن معرفة المجموع المؤثر لعدة جهود في دائرة باستخدام الدائرة التي في شكل 5-14 وهي تسمى دائرة التجميع وهي امتداد لدائرة المكبر العاكس .



شكل 5-14

للحصول على المخرج استخدم KCL لمقدة الطرف العاكس :

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \dots + \frac{v_n}{R_n} + \frac{v_o}{R_f} = 0$$

ومنها

$$v_o = -\left(\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \dots + \frac{R_f}{R_n} v_n\right) \quad (11)$$

**مثال 5-10:** اعتبر الدائرة في شكل 4-15 لها أربعة خطوط دخل ذو مقاومات هي  $R_2 = 1$ ،  $R_1 = 1$ ، وهذه القيم بالكيلو أوم (kΩ) وفرضت قيم  $R_f = 1$ ،  $R_4 = 1/8$ ،  $R_3 = 1/4$ ،  $1/2$  لجهد كل خط إما 0 أو 1V أوجد  $v_o$  بدلالة  $v_1$ ،  $v_2$ ،  $v_3$ ،  $v_4$  إذا أعتبرت القيم التالية لكل دخل.

$$v_4 = 1V \quad v_3 = 0 \quad v_2 = 0 \quad v_1 = 1V \quad (أ)$$

$$v_4 = 1V \quad v_3 = 1V \quad v_2 = 1V \quad v_1 = 0 \quad (ب)$$

من المعادلة (11) :

$$v_o = -(8v_4 + 4v_3 + 2v_2 + v_1)$$



وبالتعويض بقيم  $v_1$  إلى  $v_4$  نحصل على :

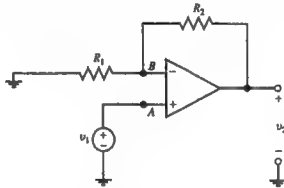
$$(a) \quad v_a = -9 \text{ V}$$

$$(b) \quad v_a = -14 \text{ V}$$

المجموعة  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  تكون تعاقب ثنائي يحتوى على أربعة أرقام بقيمة مرتفعة (1V) أو قيم منخفضة (0V). ومجموعات الدخل المعطاة فى (أ)، (ب) تؤول إلى الأرقام الثنائية  $(91)_{10} = (1001)_2$ ،  $(14)_{10} = (1110)_2$  على التوالى وعند جهود الدخل بقيمة مرتفعة (1V) أو منخفضة (0V) فإن الدائرة تحول الأرقام الثنائية التى تمثل مجموعة الدخل  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  إلى جهد سالب، وهو عند قياسه بقيم V يكون مساوياً لمجموعة الدخل ممثلة للأساس 10. وتكون الدائرة عبارة عن محول رقمى / تناظرى (D/A).

### 5.7 دوائر المكبر الغير عاكس

فى دائرة المكبر الغير عاكس تصل إشارة الدخل إلى الطرف الغير عاكس فى مكبر التشغيل ويوصل الطرف العاكس بالخارج عن طريق المقاومة  $R_2$  وأيضاً بالأرض عن طريق المقاومة  $R_1$  انظر شكل 5-15.



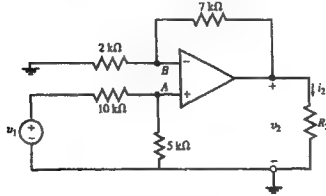
شكل 5-15

لإيجاد الكسب  $v_2/v_1$  استخدم KCL عند العقدة B. لاحظ أن الطرفان A، B كلاهما عند الجهد  $V_1$  ومكبر العمليات لا يسحب تياراً.

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{v_2}{v_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (12)$$

الكسب  $v_2/v_1$  يكون موجباً وأكبر أو يساوى واحد. وتكون مقاومة الدخل ما لا نهاية نظراً لأن المكبر لا يسحب تياراً.

مثال 5-11: أوجد  $v_1$  و  $v_2$  في الدائرة المبينة شكل 5-16.



شكل 5-16

أوجد أولاً  $v_A$  بتقسيم  $v_1$  بين المقاومتين  $10\text{ k}\Omega$  ،  $5\text{ k}\Omega$ .

$$v_A = \frac{5}{5+10} v_1 = \frac{1}{3} v_1$$

من المعادلة (12) نحصل على :

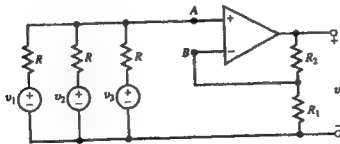
$$v_2 = \left(1 + \frac{7}{2}\right) v_A = \frac{9}{2} v_A = \frac{9}{2} \left(\frac{1}{3} v_1\right) = 1.5 v_1 \quad \text{and} \quad \frac{v_2}{v_1} = 1.5$$

طريقة أخرى .

أوجد  $v_B$  بتقسيم  $v_2$  بين  $2\text{ k}\Omega$  ،  $7\text{ k}\Omega$  وجعل  $v_B = v_A$ .

$$v_A = \frac{2}{2+7} v_2 = \frac{2}{9} v_2 = \frac{1}{3} v_1 \quad \text{and} \quad \frac{v_2}{v_1} = 1.5$$

مثال 5-12: أوجد  $v_0$  في شكل 5-17 بدلالة  $v_1$  ،  $v_2$  ،  $v_3$  وأيضاً عناصر الدائرة.



شكل 5-17

أولاً نوجد  $v_A$  بتطبيق KCL عند العقدة A .

$$\frac{v_1 - v_A}{R} + \frac{v_2 - v_A}{R} + \frac{v_3 - v_A}{R} = 0 \quad \text{or} \quad v_A = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \quad (13)$$

من المعادلتين (12) ، (13) نحصل على :

$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_A = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)(v_1 + v_2 + v_3) \quad (14)$$

## 5.8 تابع الجهد :

مكبر التشغيل المبين في الدائرة شكل 5-18(a) يعطى مكبراً ذو وحدة كسب والتي منها  $v_2 = v_1$  حيث  $v^+ = v^-$  ،  $v_2 = v^+$  ،  $v_1 = v^-$  وجهد الخرج  $v_2$  يتبع جهد الدخل  $v_1$  . وبغذية التيار  $i_1$  للمقاومة  $R_1$  فإن مكبر التشغيل يلغى تأثير المقاومة  $R_1$  كحمل على جهد المتبع وهي لذلك تؤدي عمل المانع .

**مثال 5-13 (أ) :** أوجد  $i_2$  ،  $v_1$  ،  $v_2$  ،  $i_1$  في شكل 5-18(a) . (ب) قارن هذه النتائج مع تلك التي نحصل عليها حينما يكون المتبع والحمل متصلين مباشرة كما في شكل 5-18(b) .

(أ) مع وجود مكبر التشغيل شكل 5-18(b) نحصل على :

$$i_2 = 0 \quad v_1 = v_o \quad v_2 = v_1 = v_o \quad i_1 = v_o / R_1$$

لا يسمح مكبر التشغيل كتابع للجهد أى تيار من إشارة المتبع  $v_o$  . ولذلك فإن  $v_o$  تصل إلى الحمل بدون أى خفض يسببه تيار الحمل . ويغذى التيار في المقاومة  $R_1$  عن طريق مكبر التشغيل .

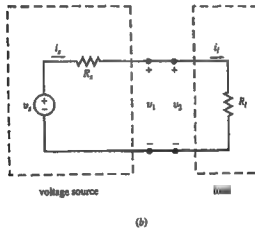
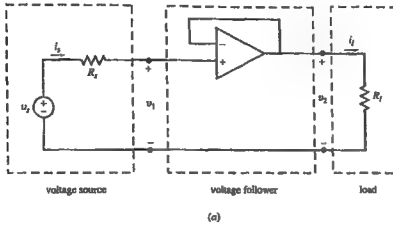
(ب) عند فصل مكبر التشغيل شكل 5-18(b) نحصل على :

$$i_2 = i_1 = \frac{v_o}{R_1 + R_2} \quad \text{and} \quad v_1 = v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_o$$

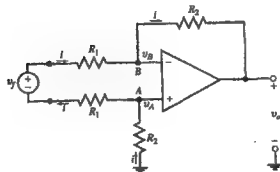
التيار المار في المقاومة  $R_1$  يمر أيضاً في المقاومة  $R_2$  مسبباً خفضاً في الجهد عليها . وبذلك يكون جهد الحمل  $v_2$  معتمداً على  $R_1$  .

## 5.9 المكبرات التفاضلية والفرقية

إشارة المتبع  $v_o$  التي ليس لها توصيلة بالأرض تسمى منبع غير مؤرض. مثل هذه الإشارة يمكن تكبيرها بالدائرة شكل 5-19.



شكل 5-18



شكل 5-19

هنا يكون طرفا الدخل A ، B لمكبر التشغيل لهما نفس الجهد. لذا عند استخدام KVL حول حلقة الدخل نحصل على:

$$v_f = 2R_1 i \quad \text{or} \quad i = v_f / 2R_1$$

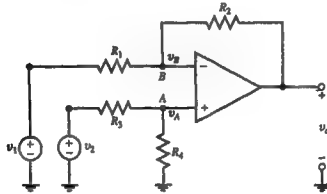
ولا يسحب دخل مكبر التشغيل أى تيار وبذلك يمر التيار أيضاً فى المقاومة  $R_2$ . وباستخدام KVL حول مكبر التشغيل نحصل على:

$$v_o + R_2 i + R_2 i = 0 \quad v_o = -2R_2 i = -2R_2 v_f / 2R_1 = -(R_2 / R_1) v_f \quad (15)$$

وفى الحالة الخاصة حينما يكون جهدا المنبعين  $v_1$ ،  $v_2$  الذين لهما توصيلة أرضى مشتركة متصلين بطرفى الدخل العاكس والغير عاكس للدائرة على الترتيب (انظر شكل 5-20) فإننا نحصل على:

$$v_o = (R_2 / R_1)(v_2 - v_1) \quad (16)$$

**مثال 5-14:** أوجد الجهد  $v_o$  كدالة للجهدين  $v_1$ ،  $v_2$  فى الدائرة المبينة شكل 5-20.



شكل 5-20

بتطبيق KCL عند العقدتين A ، B .

Node A:  $\frac{v_A - v_2}{R_3} + \frac{v_A}{R_4} = 0$

Node B:  $\frac{v_B - v_1}{R_1} + \frac{v_B - v_o}{R_2} = 0$

ضع  $v_A = v_B$  واحذفهما من معادلة KCL السابقة نحصل على :

$$v_o = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1(R_3 + R_4)} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1$$

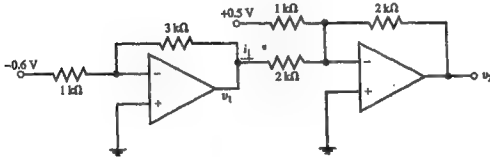
حينما  $R_2 = R_4$  ،  $R_3 = R_1$  فإن المعادلة (17) تزول إلى (16).

### 5.10 الدائرة المحتوية على عدد من مكبرات التشغيل

التحليل والتأثير التي حصلنا عليها في الدوائر المحتوية على مكبر تشغيل واحد يمكن تطبيقه أيضاً للدوائر المحتوية على عدة مكبرات للتشغيل متصلة بالتتابع أو على شكل حلقي لأنه لا تأثر للأحمال عليها .

مثال 5-15: أوجد  $v_1$ ،  $v_2$  في شكل 5-21.

مكبر التشغيل الأول يعمل كعكاس



شكل 5-21

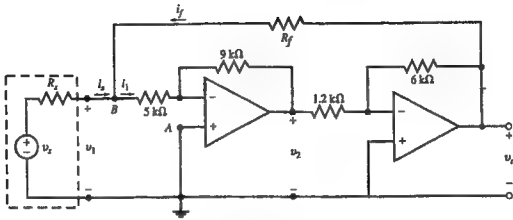
$$v_1 = -(3/1)(-0.6) = 1.8 \text{ V}$$

ومكبر التشغيل الثاني يعمل كجامع .

$$v_2 = -(2/1)(0.5) - (2/2)(1.8) = -2.8 \text{ V}$$

مثال 5-16: افترض أن  $R_s = 1 \text{ k}\Omega$  في الدائرة شكل (5-22) أوجد  $v_i$ ،  $i_s$ ،  $v_o$ ،  $v_2$ ،  $v_1$  كدو

للقيمة  $v_8$  عند (أ)  $R_f = \infty$  ، (ب)  $R_f = 40 \text{ k}\Omega$  .



شكل 5-22

(أ) عند  $R_f = \infty$  كلا المكبران يعملان كعاكس ومتصلان بالتتابع ، ومع  $v^+ = 0$  فإنه بتقسيم الجهد

في دائرة الدخل نحصل على :

$$v_1 = \frac{5}{5+1} v_2 = \frac{5}{6} v_2 \quad (18)$$

ومن المكبرات العاكسة نحصل على :

$$v_2 = -(9/5)v_1 = -(9/5)\left(\frac{5}{6}v_2\right) = -1.5v_2$$

$$v_0 = -(6/1.2)v_2 = -5(-1.5v_2) = 7.5v_2$$

$$i_2 = i_1 = \frac{v_2}{6000} \text{ (A)} = 0.166v_2 \text{ (mA)}$$

$$i_f = 0$$

(ب) عند  $R_f = 40k\Omega$  ومن المكبرات العاكسة نحصل على  $v_2 = -(9/5)v_1$  ،  $v_0 = 9v_1$

وبالتالى  $v_0 = 9v_1$  وبتطبيق KCL للتيارات الخارجة من العقدة B .

$$\frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1}{5} + \frac{v_1 - v_0}{40} = 0$$

وبتعويض  $v_0 = 9v_1$  فى المعادلة (19) وباستخدام الجهد  $v_1$  نحصل على :

$$v_1 = v_1$$

$$v_2 = -(9/5)v_1 = -1.8v_1$$

$$v_0 = -(6/1.2)v_2 = -5(-1.8v_1) = 9v_1$$

$$i_2 = \frac{v_2 - v_1}{1000} = 0$$

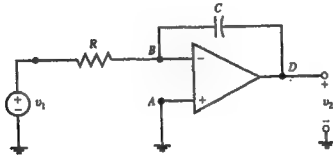
باستخدام KCL عند العقدة B فإن :

$$i_f = i_1 = \frac{v_1}{5000} \text{ (A)} = \frac{v_2}{5000} \text{ (A)} = 0.2 v_2 \text{ (mA)}$$

ويزود التيار  $i_1$  المار في المقاومة  $5\text{-k}\Omega$  لمكبر التشغيل الأول بخرج مكبر التشغيل الثاني من خلال مقاومة التغذية الخلفية  $40\text{k}\Omega$  وبالتالي يكون التيار  $i_2$  المسحوب من منبع  $v_2$  صفراً وتكون مقاومة الدخل للدائرة ما لا نهاية .

### 5.11 دوائر التكامل والتفاضل :

باستبدال مقاومة التغذية الموجودة في المكبر العاكس في شكل 5-13 بمكثف فإننا نحصل على دائرة التكامل المبينة في شكل 5-23 .



شكل 5-23

للحصول على علاقة بين الدخل والخرج نستخدم KCL عند العقدة العاكسة B .

$$\frac{v_1}{R} + C \frac{dv_2}{dt} = 0 \quad \text{from which} \quad \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{RC} v_1$$

and 
$$v_2 = -\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t v_1 dt$$

أى أن الخرج يكون مساوياً لتكامل الدخل مضروباً في معامل الكسب  $-1/RC$  .

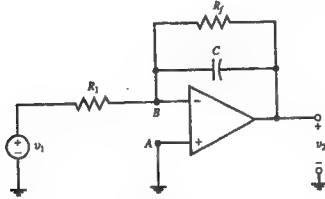
مثال 5-17 : إذا كان  $R = 1\text{k}\Omega$  ،  $C = 1\mu\text{F}$  ،  $v_1 = \sin 2000t$  في شكل 5-23 باعتبار  $v_2(0) = 0$  أوجد  $v_2$  عند  $t > 0$  .

$$v_2 = -\frac{1}{10^3 \times 10^{-6}} \int_0^t \sin 2000t dt = 0.5(\cos 2000t - 1)$$



## المكامل المسرب

الدائرة المبينة شكل 5-24 تسمى بالمكامل المسرب نظراً لأن جهد المكثف يفرغ بصفة مستمرة من خلال مقاومة التغذية الخلفية  $R_f$  وهذا سوف يؤدي إلى نقص في الكسب  $|v_2/v_1|$  وإزاحة وجهيه في  $v_2$ . راجع بند 5-13 للحصول على بيانات أكثر.



شكل 5-24

مثال 5-18: في شكل 5-24،  $C = 1\mu F$ ،  $R_1 = R_f = 1k\Omega$ ،  $v_1 = \sin 2000t$ . أوجد  $v_2$ .

جهد العقدة العاكسة B تكون صفراً ومجموع التيارات الواصلة إليها يكون أيضاً صفراً وبالتالي:

$$\frac{v_1}{R_1} + C \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_f} = 0 \quad \text{or} \quad v_1 + 10^{-3} \frac{dv_2}{dt} + v_2 = 0$$

$$10^{-3} \frac{dv_2}{dt} + v_2 = -\sin 2000t \quad (21)$$

الحل للمعادلة (21) لإيجاد  $v_2$  هو موجة جيبية لها نفس تردد الجهد  $v_1$  ولكن بقيمة عظمى وزاوية وجه مختلفان أى أن:

$$v_2 = A \cos(2000t + B) \quad (22)$$

وللحصول على A، B نعوض بقيم  $v_2$ ،  $dv_2/dt$  التي في (22) في المعادلة (21).

أولاً:  $dv_2/dt = -2000 A \sin(2000t + B)$  ولذلك:

$$10^{-3} dv_2/dt + v_2 = -2A \sin(2000t + B) + A \cos(2000t + B) = -\sin 2000t$$

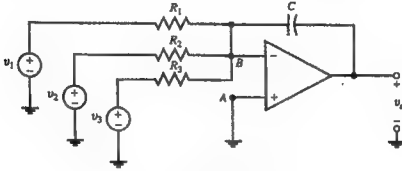
But  $2A \sin(2000t + B) - A \cos(2000t + B) = A \sqrt{5} \sin(2000t + B - 26.57^\circ) = \sin 2000t$

وبالتالى :  $A = \sqrt{5/5} = 0.447$ ,  $B = 26.57^\circ$

$$v_2 = 0.447 \cos(2000t + 26.57^\circ) \quad (23)$$

### المكبر الجامع المتكامل

يمكن لمكبر تشغيل واحد فى تشكيل عاكس مع خطوط دخل متعددة ومكثف تغذية خلفية كما هو مبين فى شكل 5-25 أن يعطى مجموع التكاملات لدوال الدخل متعددة بالكسب المطلوب .



شكل 5-25

**مثال 5-19:** أوجد جهد الخرج  $v_0$  للمكبر الجامع المتكامل فى شكل 5-25 حيث تحتوى الدائرة على ثلاث دخول .

استخدم KCL عند الدخل العاكس للمكبر التشغيل للحصول على :

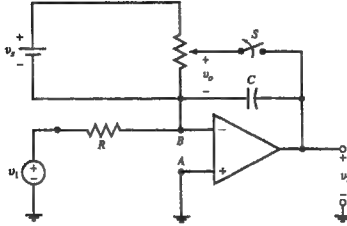
$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} + C \frac{dv_0}{dt} = 0$$

$$v_0 = - \int_{-\infty}^t \left( \frac{v_1}{R_1 C} + \frac{v_2}{R_2 C} + \frac{v_3}{R_3 C} \right) dt$$

### قيم الحالة الابتدائية للتكامل

يمكن تحديد الحالة الابتدائية للجهد  $v_0$  فى التكامل باستخدام مفتاح توصيل يمكن فصله وتوصيله كما فى شكل 5-25 . وإذا تم توصيل المفتاح لحظياً تم فصله عند الزمن  $t = t_0$  فإنه سنتج قيمة ابتدائية للجهد  $v_0$  على طرفى المكثف وتظهر عند جهد الخرج  $v_2$  . لقيم  $t > t_0$  فإن التكامل الناتج من الدخل يضاف للخرج .

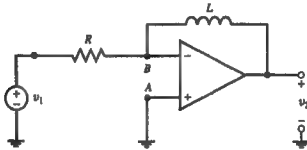
$$v_2 = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t v_1 dt + v_o \quad (25)$$



شكل 5-26

### المفاضل

عند وضع عنصر حثي [ملف] في مكان مقاومة مسار التغذية الخلفية لمكبر عكسي . فإن تفاضل إشارة الدخل ستظهر عند الخرج . يبين شكل 5-27 دائرة المفاضل الناتج .



شكل 5-27

للحصول على العلاقة بين الدخل والخرج تستخدم KCL للتيارات التي تصل إلى عقدة العاكسة .

$$\frac{v_1}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_2 dt = 0 \quad \text{or} \quad v_2 = -\frac{L}{R} \frac{dv_1}{dt} \quad (26)$$

## 5.12 الحاسبات التفاضلية

تستخدم مكبرات التشغيل ودوائر التجميع والمكاملات المبنية في البنود السابقة كأجزاء مكونة لبناء الحاسبات التفاضلية الخاصة بحل المعادلات التفاضلية الخطية . ولكننا نتجنب استخدام المقاضلات لتأثير التشويش الواضح ورغم قلة نسبته .

ولتصميم دائرة حاسبة نقوم أولاً بإعادة ترتيب المعادلة التفاضلية بحيث يكون الجزء التفاضلي ذو أعلى درجة للمتغير المطلوب في أحد طرفي المعادلة وجميع الحدود الأخرى في الطرف الآخر . ثم نبدأ بالتكامل الجامع لإجراء التكامل للمعادلة . ثم نضيف المكاملات والمكبرات التي على التوالي والتي في الحلقات المغلقة كما هو مبين في الأمثلة التالية . وفي هذا الجزء نستخدم الرموز التالية  $x'' = d^2x/dt^2$  ،  $x' = dx/dt$  . وهكذا .

**مثال 20-5:** صمم دائرة باعتبار  $x(t)$  كدخل للحصول على الخرج  $y(t)$  التي تحقق المعادلة التالية :

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = x(t) \quad (27)$$

الخطوة 1 أعد ترتيب المعادلة التفاضلية (27) كالتالي :

$$y'' = x - 2y' - 3y \quad (28)$$

الخطوة 2 نستخدم مكبر التشغيل الجامع المكامل #1 المبين شكل 28-5 لتكامل المعادلة (28) . استخدم المعادلة 24 لإيجاد كل من  $R_1$  ،  $R_2$  ،  $R_3$  ،  $C_1$  بحيث يكون خرج مكبر التشغيل #1 ،  $v_1 = -y'$  وباعتبار  $C_1 = 1\mu F$  تحسب المقاومات كالتالي :

$$\begin{array}{ll} R_1 C_1 = 1 & R_1 = 1 M\Omega \\ R_2 C_1 = 1/3 & R_2 = 333 k\Omega \\ R_3 C_1 = 1/2 & R_3 = 500 k\Omega \end{array}$$

$$v_1 = -\int (x - 3y - 2y') dt = -\int y'' dt = -y' \quad (29)$$

الخطوة 3 كامل  $v_1 = -y'$  باستخدام مكبر التشغيل #2 للحصول على  $y$  . ويجعل  $C_2$   $R_4 = 1 M\Omega$  ،  $= 1\mu F$  للحصول على  $y = v_2$  عند خرج مكبر التشغيل #2 .

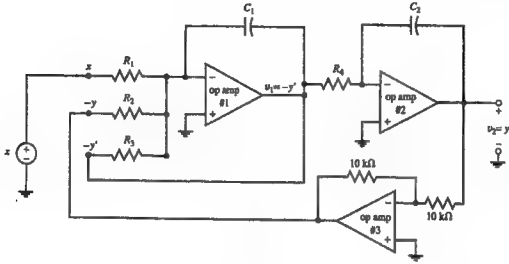
$$v_2 = -\frac{1}{R_4 C_2} \int v_1 dt = \int y' dt = y \quad (30)$$

الخطوة 4. غلّ مكبر التشغيل #1 ثم بالدخول خلال التوصلات الآتية :

$v_2 = y'$  مباشرة إلى المقاومة  $R_3$  إلى مكبر التشغيل #1

$v_2 = y$  خلال مكبر التشغيل العاكس #3 بكسب مساوياً للوحدة للحصول على  $-y$  ثم يغذى

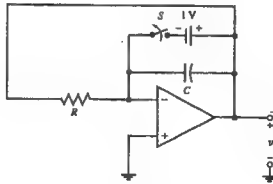
إلى مكبر التشغيل رقم #1 من خلال المقاومة  $R_2$  . ثم يوصل جهد المنبع  $x(t)$  إلى مكبر التشغيل رقم #1 من خلال المقاومة  $R_1$  . شكل (5-28) يوضح الدائرة الكاملة .



شكل 5-28

مثال 5-21: صمم دائرة مكبر تشغيل لمنبع مثالي للجهد  $v(t)$  والتي تحقق المعادلة  $v' + v = 0$  لقيم  $v(0) = 1V$  باعتبار  $t > 0$ .

باتباع الخطوات المستخدمة في مثال 5.20 فإنه يمكن تجميع الدائرة شكل 5-29 باعتبار  $RC = 1s$  والقيمة الابتدائية تحسب عند فتح المفتاح عند  $t = 0$  . وحيتشّ يبدو الحل عند خرج مكبر التشغيل زمن  $t > 0$  هو  $v(t) = e^{-t}$ .



شكل 5-29

### 5.13 مرشح التردد المنخفض

يسمى مكبر الترددات الانتقائي الذي يتناقص كسبه من قيمة محدودة إلى الصفر حينما يزداد تردد دخل الموجة الجيبية من قيمة التيار المستمر (صفر) إلى ما لا نهاية بمرشح التردد المنخفض . يعرف الرسم البياني للكسب والتردد بمجاوب التردد . وتوجد طريقة سهلة للحصول على مجاوب التردد للمرشحات سوف يبين في فصل 13 . والمكبر المسرب المبين في شكل 5-24 هو أحد المرشحات ذو التردد المنخفض كما سيوضح في المثال التالي :

**مثال 5-22:** في مثال 5-18 ضع  $v_1 = \sin \omega t$  ثم أوجد  $v_2$  لقيم

$$\omega = 0, 10, 100, 10^3, 10^4, 10^5 \text{ rad/s}$$

ب تكرار الخطوات في مثال 5-18 نوجد تجاوب التردد والمعطى بالجدول 5-1 . حيث تقل قيمة التجاوب مع التردد وتكون الدائرة هي دائرة مرشح ذو تردد منخفض .

#### جدول 5-1

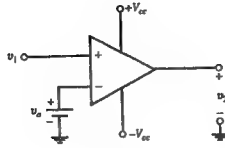
تجاوب التردد لمرشح التردد المنخفض

w, rad/s	0	10	100	$10^3$	$10^3$	$10^3$
f, Hz	0	1.59	1.59	159	$1.59 \times 10^3$	$1.59 \times 10^3$
$ v_2/v_1 $	1	1	0.995	0.707	0.1	0.01

### 5.14 المقارن

تقارن الدائرة المبينة في شكل 5-30 الجهد  $v_1$  مع جهد المقارنة  $v_0$  . وحيث أن كسب الدائرة المفتوحة يكون كبيراً جداً فإن خرج مكبر التشغيل  $v_2$  يكون إما عند  $+V_{cc}$  (إذا كانت  $v_0 < v_1$ ) أو  $-V_{cc}$  (إذا كانت  $v_0 > v_1$ ) . وهذا مبين بالمعادلة  $v_2 = V_{cc} \text{sgn}[v_1 - v_0]$  حيث "sgn" تحل محل الإشارة "ل" . . . . . ولقيم  $v_0 = 0$  نحصل على .

$$v_2 = V_{cc} \text{sgn}[v_1] = \begin{cases} +V_{cc} & v_1 > 0 \\ -V_{cc} & v_1 < 0 \end{cases}$$



شكل 5-30

مثال 5-23: فى شكل 5-30 إذا كانت  $V_{cc} = 5V$  ،  $v_0 = 0$  ،  $v_1 = \sin \omega t$  ، أوجد  $v_2$  عند  $0 < t < \pi/\omega$  .

$$v_1 = \sin \omega t > 0 \quad v_2 = 5V$$

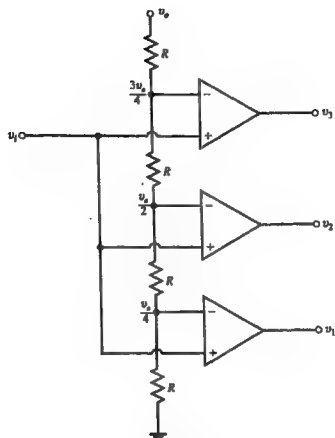
عند  $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$

$$v_1 = \sin \omega t < 0 \quad v_2 = -5V$$

جهد الخرج  $v_2$  هى نبضة مربعة التى تظهر بين الجهدين  $+5V$  ،  $-5V$  لفترة  $2\pi/\omega$  . وموجة واحدة للجهد  $v_2$  تعطى بالعلاقة :

$$v_2 = \begin{cases} 5V & 0 < t < \pi/\omega \\ -5V & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

مثال 5-24: الدائرة المبينة شكل 5-31 تبين محول توازى من التناظرى إلى الرقمى . والجهود  $+V_{cc}$  ،  $-V_{cc}$  قد حذفت للتبسيط افترض أن  $V_{cc} = 5V$  ،  $v_0 = 4V$  ،  $v_1 = t(V)$  ، أوجد جهود الخرج  $v_1$  ،  $v_2$  ،  $v_3$  وفسر الإجابة .  $0 < t < 4s$



شكل 5-31

مكبرات التشغيل ليس لها تغذية خلفية لذلك فهي تعمل كمقارنات جدول (5-2) يعطى الخرج لقيم  $+5V$ ،  $-5V$  بينهم فى جدول 5-2.

جدول 5-2

الزمن s	الدخل V	الخرج V
$0 < t < 1$	$0 < v_i < 1$	$v_3 = -5$ $v_2 = -5$ $v_1 = -5$
$1 < t < 2$	$1 < v_i < 2$	$v_3 = -5$ $v_2 = -5$ $v_1 = +5$
$2 < t < 3$	$2 < v_i < 3$	$v_3 = -5$ $v_2 = +5$ $v_1 = +5$
$3 < t < 4$	$3 < v_i < 4$	$v_3 = +5$ $v_2 = +5$ $v_1 = +5$



والقيم الثنائية المتعاقبة للجهود ( $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ) المبينة فى الجدول 5-2 تحدد بطريقة فريدة جهد الدخل فى حيز معين . ومع هذا فإنها بصورتها الحالية لا تكون الأرقام الثنائية التى تمثل قيم الدخل . ومن ثم فإنه باستخدام مشفر يمكن تحويل القيم المتعاقبة السابقة إلى أرقام ثنائية تمثل قيم الدخل التناظرية .

### أمثلة محلولة

5-1 فى شكل 5-3 بفرض أن  $v_s = 20V$ ،  $R_s = 10\Omega$ ،  $R_i = 990\Omega$ ،  $k = 5$ ،  $R_0 = 3\Omega$  . أوجد (أ) مكافئ ثيفين للدائرة المبينة من ناحية  $R_L$ ، (ب) الجهد  $v_2$  والقدرة المستهلكة فى المقاومة  $R_L$  لقيم  $R_L = 0.5, 1, 3, 5, 10, 100, 1000\Omega$  .

(أ) جهد الدائرة المفتوحة و تيار القصر عند الطرفين A-B هما  $v_{o.c} = 5v_1/3$ ،  $i_{s.c} = 5v_1/3$  على التوالى .

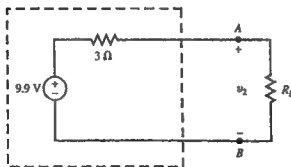
نوجد الجهد  $v_1$  بقسمة الجهد  $v_2$  بين المقاومتين  $R_i$ ،  $R_s$  ولذلك :

$$v_1 = \frac{R_i}{R_s + R_i} v_2 = \frac{990}{10 + 990} (20) = 19.8 V$$

ومنها

$$\begin{aligned} v_{o.c} &= 5(19.8) = 99 V & v_{Th} &= v_{o.c} = 99 V \\ i_{s.c} &= 99/3 = 33 A & R_{Th} &= v_{o.c} / i_{s.c} = 3 \Omega \end{aligned}$$

ومكافئ ثيفين كما هو مبين فى شكل 5-32 .



شكل 5-32

(ب) وعند توصيل الحمل  $R_L$  فإننا نحصل على :

$$v_2 = \frac{R_L}{R_L + R_{Th}} v_{Th} = \frac{99R_L}{R_L + 3} \quad \text{and} \quad p = \frac{v_2^2}{R_L}$$

جدول 5-3 يبين الجهد على طرفي الحمل والقدرة المستهلكة فيه لقيم المقاومة  $R_L$  السبعة . ويصل جهد الحمل إلى قيمته العظمى حينما تكون  $R_L$  تساوى ما لا نهاية . ومع هذا فإن القدرة المعطاة للمقاومة  $R_L = \infty$  تكون صفراً . والقيمة العظمى للقدرة المعطاة للمقاومة  $R_L$  تكون عند القيمة  $R_L = 3\Omega$  والتي تكون مساوية لمقاومة خرج المكبر .

### جدول 5-3

$R_L, \Omega$	$v_2, V$	$p, W$
0.5	14.14	400.04
1	24.75	612.56
3	49.50	816.75
5	61.88	765.70
10	76.15	579.94
100	96.12	92.38
1000	98.70	9.74

5-2 في الدوائر المبينة في شكل 5-4 ، 5-5 ضع  $R_1 = 1k\Omega$  ،  $R_2 = 5k\Omega$  . أوجد الكسب  $G = v_2/v_s$

في شكل 5-4 والكسب  $G = v_2/v_s$  في شكل 5-5 لقيم  $k = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1000, \infty$  وقارن النتائج .

من المعادلة رقم (5) في مثال 5-3 عند  $R_1 = 1k\Omega$  ،  $R_2 = 5k\Omega$  ونحصل على :

$$G^+ = \frac{v_2}{v_s} = \frac{5k}{6-k} \quad (31)$$

في مثال 5-4 وجدنا أن :

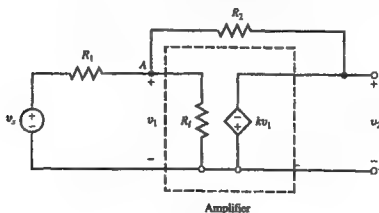
$$G^- = \frac{v_2}{v_s} = -\frac{5k}{6+k} \quad (32)$$

جدول 5-4 يبين قيم الكسب  $G^+$  ،  $G^-$  المحسوبة لقيم  $k$  التسعة . وحينما تصبح  $k$  كبيرة جداً فإن قيمتي  $G^+$  ،  $G^-$  تقتربان من حد الكسب وهو 5- . وهي القيمة السالبة للنسبة  $R_2/R_1$  والتي لا تعتمد على قيمة  $k$  . والدائرة المبينة شكل 5-5 (ذات التغذية الخلفية السالبة) تكون دائماً مستقرة ويقترب كسبها من حد الكسب . ومع هذا فإن الدائرة المبينة شكل 5-4 (ذات التغذية الخلفية الموجبة) تكون غير مستقرة .  
 ويصبح الكسب  $G^+$  كبيراً جداً كلما اقتربت قيمة  $k$  من القيمة 6 . لاحظ أنه عند  $k = 6$  ،  $G^+ = \infty$  .

جدول 5-4

$k$	$G^+$	$G^-$
1	1.0	-0.71
3	2.5	-1.25
4	10.0	-2.00
6	$\infty$	-2.50
8	-20.0	-2.86
10	-12.5	-3.13
100	-5.32	-4.72
1000	-5.03	-4.97
$\infty$	-5.00	-5.00

5-3 لقيم  $R_1 = 50k\Omega$  ،  $R_2 = 5k\Omega$  ،  $R_1 = 1k\Omega$  في الدائرة المبينة شكل 5-33 . أوجد  $v_2/v_1$  لقيم  $k = 1, 10, 100, 1000, \infty$  وقارن النتائج مع قيم  $G^-$  في جدول 5-4 .



شكل 5-33

تحل هذه المسألة بتطبيق KCL عند العقدة A (هناك طريقة أخرى باستخدام مكافئ ثنتين في المسألة رقم 5-30) وبهذا :

$$\frac{v_1 - v_x}{1} + \frac{v_1 - v_2}{5} + \frac{v_1}{50} = 0 \quad (33)$$

ومن المكبر نحصل على :

$$v_2 = -kv_1 \quad \text{or} \quad v_1 = -v_2/k \quad (34)$$

وبتعميـض  $v_1$  من المعادلة (34) في المعادلة (33) وبترتيب الحدود نحصل على :

$$\frac{v_2}{v_x} = \frac{-50k}{61 + 10k} = \frac{-5k}{6.1 + k} \quad (35)$$

ويبين جدول 5-5 قيم  $v_2/v_x$  من المعادلة (35) كدالة لقيم  $k$ . وتقلل مقاومة الدخل للمكبر  $50k\Omega$  الكسب الكلى بقيم صغيرة جداً كما يبدو عند مقارنة الجدولين 5-4، 5-5. وقد تسببت التغذية الخلفية فى تقليل تأثير مقاومة الدخل للمكبر على تغيير الكسب الكلى.

جدول 5-5

$k$	$v_2/v_1$
1	- 0.704
10	- 3.106
100	- 4.713
1000	- 4.97
$\infty$	- 5.00

5-4 إذا كان  $R_2 = 5k\Omega$ ،  $R_1 = 1k\Omega$  مرة أخرى فى الـ اة المينة شكل 5-33.

(أ) أوجد  $v_2/v_x$  كدالة فى  $k$ ،  $R_1$ .

(ب) إذا كان  $k = 1k\Omega$ ،  $R_1 = 1k\Omega$  أوجد  $v_2/v_1$  لقيم  $k = 1, 10, 100, 1000, \infty$  وكرر لقيم  $R_1 = \infty$ .

(ج) ناقش تأثيرات كلا من  $R_1$ ،  $k$  على الكسب الكلى. وبين أنه عند  $k = \infty$ ،  $R_1 \neq 0$  فإن كسب المكبر لا يتوقف على  $R_1$  ويساوى  $-R_2/R_1$ .

(أ) استخدم KCL للتيارات الخارجة من العقدة A للحصول على :

$$\frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1 - v_2}{5} + \frac{v_1}{R_i} = 0$$

ونحصل من المعبر  $v_2 = -kv_1$  أو  $v_1 = -v_2/k$ . وبالتعويض بقيمة  $v_1$  في معادلة KCL ثم بترتيب الحدود نحصل على :

$$\frac{v_2}{v_1} = -5 \frac{ck}{1 + ck} \quad \text{where } c = \frac{R_i}{5 + 6R_i} \quad (36)$$

(ب) لقيمة  $k = 1 \text{ k}\Omega$  ،  $R_i = 1/11$  ،  $c = 1/11$  والتي نعوض عنها في معادلة (36) نحصل على :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-5k}{11 + k} \quad (37)$$

ولقيمة  $R_i = \infty$  نحصل على  $c = 1/6$  ومنها :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-5k}{6 + k} \quad (38)$$

الجدول 5-6 يعطى قيم  $v_2/v_1$  في المعادلة (37) وفي المعادلة (38) لقيم  $k$ . لاحظ أن المعادلة (38) متطابقة مع (32).

جدول 5-6

k	$v_2/v_1$	
	$R_i = 1 \text{ k}\Omega$	$R_i = \infty$
1	- 0.31	- 0.71
10	- 2.38	- 3.12
100	- 4.51	- 4.72
1000	- 4.95	- 4.97
$\infty$	- 5.00	- 5.00

(ج) بمقارنة العمودين في جدول 5-6 نلاحظ أنه كلما صغرت المقاومة  $R_i$  كلما قل الكسب الكلى  $G$ . مع هذا فإنه كلما زاد كسب الدائرة المفتوحة  $k$  قل تأثير المقاومة  $R_i$  وحينما تصبح  $k$  كبيرة جداً فإن  $v_2/v_1$  تقترب من -5- فيما عدا إذا كانت  $R_i = 0$ .

5-5 إذا كانت  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$  ،  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  مرة أخرى في الدائرة المبينة شكل 5-33. استبدل الدائرة على يسار A المحتوية على  $V_s$  ،  $R_i$  ،  $R_1$  بمكافئ ثنتين لها. ثم استخدم المعادلة (5) للحصول على المعادلة (36) .

$$v_{Th} = \frac{R_i v_s}{R_1 + R_i} = \frac{R_i v_s}{1 + R_i} \quad \text{يكون مكافئ ثنتين.}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_i}{R_1 + R_i} = \frac{R_i}{1 + R_i}$$

حيث تكون المقاومات بالكيلو أوم. ومن المعادلة 5.

$$v_2 = (1 - b) \frac{-k}{1 + bk} v_{Th}$$

$$b = \frac{R_{Th}}{R_{Th} + R_2} = \frac{R_i}{6R_i + 5} \quad \text{and} \quad 1 - b = \frac{5(1 + R_i)}{6R_i + 5} \quad \text{حيث}$$

ولذلك

$$v_2 = \frac{5(1 + R_i)}{6R_i + 5} \times \frac{-k}{1 + R_i k / (6R_i + 5)} \times \frac{R_i}{1 + R_i} v_s = \frac{-5R_i k}{6R_i + 5 + R_i k} v_s$$

وهي مطابقة للمعادلة رقم (36).

5-6 أوجد جهد الخرج لكبر تشغيل حيث  $V_{cc} = 10\text{V}$  ،  $A = 10^5$  لقيم  $V^- = 0$  ،  $V^+ = \sin t(V)$  إرجع إلى شكل 5-7 وشكل 5-8 .

يحدث التشبع سريعاً بسبب الكسب العالي .

$$|v_2| = 10^5 |v_d| = 10\text{V} \quad \alpha \quad |v_d| = 10^{-4}\text{V}$$

يمكن إهمال الفترة الخطية واستنتاج ما يلي :

$$v_2 = \begin{cases} +10\text{V} & v_d > 0 \\ -10\text{V} & v_d < 0 \end{cases}$$

حيث  $v_d = V^+ - V^- = \sin t(V)$  وتكون الدورة الواحدة للخرج كالتالي :

$$v_2 = \begin{cases} +10\text{V} & 0 < t < \pi \\ -10\text{V} & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

للحصول على قيم  $v_2$  الحقيقية نستخدم خواص التحويل لمكبر التشغيل فى شكل 5-7.

$$v_2 = \begin{cases} -10 & v_d < -10^{-4} \text{ V} \\ 10^5 v_d & -10^{-4} < v_d < 10^{-4} \text{ V} \\ +10 & v_d > 10^{-4} \text{ V} \end{cases}$$

يبدأ التشبع عند  $v_d = | \sin t | = 10^{-4} \text{ V}$  حيث أن ذلك يشمل فترة صغيرة جداً فإننا يمكن استبدال  $\sin t$  بالقيمة  $t$  ويكون جهد الخرج  $v_2$  كالتالى :

$$\begin{aligned} v_2 &= 10^5 t & -10^{-4} < t < 10^{-4} \text{ s} \\ v_2 &= 10 & 10^{-4} < t < \pi - 10^{-4} \text{ s} \\ v_2 &= -10^5 (t - \pi) & \pi - 10^{-4} < t < \pi + 10^{-4} \text{ s} \\ v_2 &= -10 & \pi + 10^{-4} < t < 2\pi - 10^{-4} \text{ s} \end{aligned}$$

لتقدير الخطأ الطفيف عند إهمال المرحلة الخطية لاحظ أنه أثناء فترة واحدة  $2\pi \text{ s}$  فإن المرحلة الخطية هى فقط  $4 \times 10^{-4} \text{ s}$  التى تعطى النسبة  $64 \times 10^{-6}$ .

5-7 أعد حل المسألة 5-6 لقيم  $v^- = 0.5$  ،  $v^+ = \sin 2\pi t \text{ (V)}$

جهد الخرج يكون :

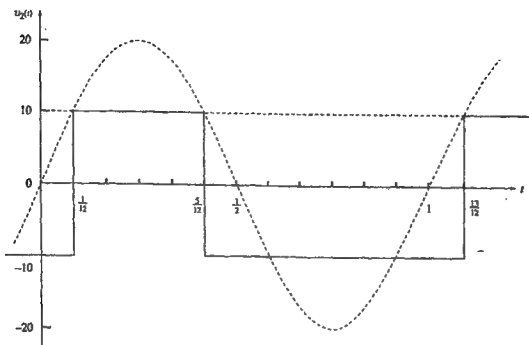
$$\begin{aligned} v_2 &= 10 \text{ V} & \text{when } v^+ > v^- \\ v_2 &= -10 \text{ V} & \text{when } v^+ < v^- \end{aligned}$$

يحدث التشبع عند  $\sin 2\pi t = 1/2$  ويحدث عند  $t = 1/12$  ،  $5/12$  ،  $13/12$  ، وهكذا. ولذلك فإن

ذبذبة واحدة للجهد  $v_2$  تعطى بالقيم :

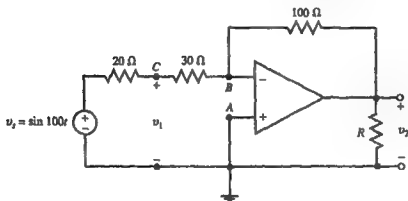
$$\begin{aligned} v_2 &= 10 \text{ V} & 1/12 < t < 5/12 \text{ s} \\ v_2 &= -10 \text{ V} & 5/12 < t < 13/12 \text{ s} \end{aligned}$$

شكل 5-34 يبين رسماً للجهد  $v^-$  ،  $v^+$  ،  $v_2$ .



شكل 5-34

5-8 في الدائرة المبينة شكل 5-35.  $v_s = \sin 100t$  أوجد  $v_1$ ،  $v_2$ .



شكل 5-35

عند العقدتين A ، B ،  $v_B = v_A = 0$  ، ولذلك ،

$$v_1 = \frac{30}{20 + 30} v_s = 0.6 \sin 100t \text{ (V)}$$

$$v_2 = -\frac{100}{30} v_1 = -\frac{100}{30} (0.6 \sin 100t) = -2 \sin 100t \text{ (V)}$$

$$v_2 = -\frac{100}{20 + 30} v_s = -2 \sin 100t \text{ (V)}$$



5-9 مستوى التشبع لمكبر التشغيل في شكل 5.31 هما  $+V_{cc} = 5V$  ،  $-V_{cc} = -5V$  . جهد المقارنة هو

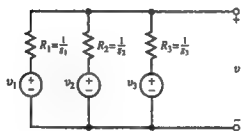
$U_0 = 1V$  . أوجد تعاقب الخرج المناظر لقيم  $U_1$  من 0 إلى 1 بخطوة مقدارها 0.25V .

راجع جدول 5-7 حيث  $L = -5V$  ،  $H = +5V$  .

جدول 5-7

$U_1, V$	$U_3$	$U_2$	$U_1$
0 to 0.25-	L	L	L
0.25+ to 0.5-	L	L	H
0.5+ to 0.75-	L	H	H
0.75+ to 1	H	H	H

5-10 أوجد الجهد  $U$  في الدائرة المبينة شكل 5-36.



شكل 5-36

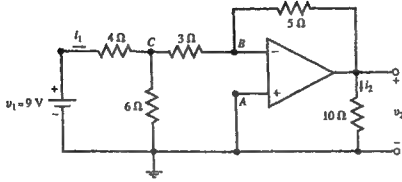
بتطبيق KCL عند العقدة A فإن :

$$(v - v_1)g_1 + (v - v_2)g_2 + (v - v_3)g_3 = 0$$

$$v = \frac{v_1 g_1 + v_2 g_2 + v_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{v_1 R_2 R_3 + v_2 R_1 R_3 + v_3 R_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$
 وبالتالي

5-11 في الدائرة المبينة شكل 5-37 أوجد  $U_C$  (وهو الجهد عند العقدة C) ،  $i_1$  ،  $R_{in}$  (مقاومة الدخل من

ناحية جهد المنبع 9-V) و  $U_2$  ،  $i_2$



شكل 5-37

عند العقدتين A ، B :  $v_B = v_A = 0$  . وتطبيق KCL عند العقدة C نحصل على :

$$(v_C - 9)/4 + v_C/6 + v_C/3 = 0 \quad \text{from which} \quad v_C = 3V$$

Then  $i_1 = (9 - v_C)/4 = 1.5 A$  and  $R_{in} = v_1/i_1 = 9/1.5 = 6 \Omega$

من دائرة مكبر العاكس نحصل على :

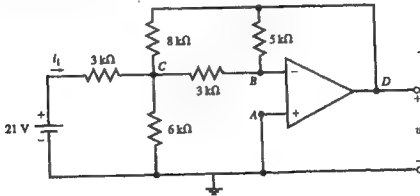
$$v_2 = -(5/3)v_C = -5V \quad \text{and} \quad i_2 = -5/10 = -0.5 A$$

5-12 أوجد  $v_2$  في المسألة (5.11) باستبدال الدائرة على يسار العقدتين A ، B في شكل 5-37 بمكافئ ثنتين .

$$R_{Th} = 3 + \frac{(6)(4)}{6+4} = 5.4 \Omega \quad \text{and} \quad v_{Th} = \frac{6}{4+6} (9) = 5.4 V$$

Then  $v_2 = -(5/5.4)(5.4) = -5V$ .

5-13 أوجد  $v_C$  ،  $v_1$  ،  $v_2$  ومقاومة الدخل  $R_{in}$  من ناحية جهد المنبع 21V المبينة في شكل 5-38.



شكل 5-38

من المكبر العاكس نحصل على :

$$v_2 = -(5/3)v_c \quad (39)$$

نلاحظ أن  $v_B = v_A = 0$  وبذلك يكون KCL عند العقدة C

$$\frac{v_c - 21}{3} + \frac{v_c}{6} + \frac{v_c}{3} + \frac{v_c - v_2}{8} = 0 \quad (40)$$

بالتعويض  $v_2 = -(3/5)v_c$  من المعادلة (39) في المعادلة (40) نحصل على  $v_2 = -10V$  ومن ثم :

$$v_c = 6V$$

$$i_1 = (21 - v_c)/3000 = 0.005 A = 5 mA$$

$$R_{in} = 21/i_1 = 21/0.005 = 4200 \Omega = 4.2 k\Omega$$

5-14 في الدائرة المينة شكل 5-38 غير المنبع 21V بالمعامل k . بين أن قيم  $v_c$  ،  $v_1$  ،  $v_2$  في المسألة رقم 5-13 تتغير بنفس المعامل ولكن  $R_{in}$  تبقى بدون تغيير .

الجهد  $v_2 = 21 k(V)$  يمثل جهد المنبع الجديد ومن مكبر العاكس نحصل على (انظر 39).

$$v_2 = -(5/3)v_c$$

باستخدام KCL نحصل على (انظر المعادلة رقم 40).

$$\frac{v_c - v_2}{3} + \frac{v_c}{6} + \frac{v_c}{3} + \frac{v_c - v_2}{8} = 0$$

وبالحل لقيم  $v_c$  ،  $v_2$  نحصل على :

$$v_c = (6/21)v_2 = 6k(V) \quad \text{and} \quad v_2 = -(10/21)v_c = -10k(V)$$

$$i_1 = (v_s - v_c)/3000 = (21 - 6)k/3000 = 0.005k A$$

$$R_{in} = v_s/i_1 = 21k/0.005k = 4200 \Omega$$

وهذه النتائج متوقعة نظراً لأن الدائرة خطية .

5-15 أوجد  $v_c$ ،  $v_2$  فى المسألة رقم 5-13 باستبدال الدائرة التى على يسار العقدة C فى شكل 5-38 (متضمناً البطارية 21V، المقاومتان 3-k $\Omega$ ، 6-k $\Omega$ ) بمكافئ ثنتين .

يحسب أولاً مكافئ ثنتين :

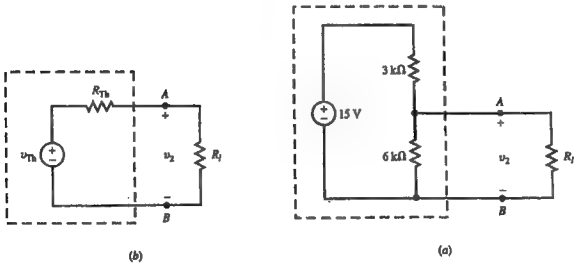
$$R_{th} = \frac{(6)(3)}{6+3} = 2 \text{ k}\Omega \quad \text{and} \quad v_{th} = \frac{6}{3+6} (21) = 14 \text{ V}$$

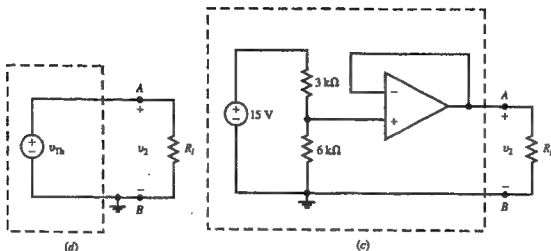
استبدل الدائرة على يسار العقدة C بقيم  $v_{th}$ ،  $R_{th}$  السابقة ثم استخدم KCL عند C .

$$\frac{v_c - 14}{2} + \frac{v_c}{3} + \frac{v_c - v_2}{8} = 0$$

من المكبر العاكس نحصل على  $v_c = -(5/3) v_2$  أو  $v_2 = -0.6 v_c$  التى تنتج بعد التعويض فى (41) بالقيم  $v_c = 6V$ ،  $v_2 = -10V$  .

5-16 (أ) أوجد مكافئ ثنتين فى الدائرة التى على يسار العقدتين A-B فى شكل 5-39(a) ثم أوجد  $v_2$  لقيم  $R_L = 1 \text{ k}\Omega$ ،  $10 \text{ k}\Omega$ ،  $\infty$  . (ب) أعد الحل لشكل 5-39(c) وقارن بالجزء (أ) .  
(أ) مكافئ ثنتين للدائرة شكل 5-39(a) موضح فى شكل 5-39(b) .





شكل 5-39

بتقسيم الجهد  $v_{th}$  بين  $R_L$ ،  $R_{th}$  نحصل على :

$$v_{th} = \frac{6}{6+3} (15) = 10 \text{ V} \quad \text{and} \quad R_{th} = \frac{(3)(6)}{3+6} = 2 \text{ k}\Omega$$

By dividing  $v_{th}$  between  $R_{th}$  and  $R_i$  we get

$$v_2 = \frac{R_i}{R_i + 2} (10)$$

For  $R_i = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $v_2 = 3.33 \text{ V}$   
 For  $R_i = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $v_2 = 8.33 \text{ V}$   
 For  $R_i = \infty$ ,  $v_2 = 10 \text{ V}$

ويعتمد جهد الخرج  $v_2$  على المقاومة  $R_L$  ويتأثر أداء مجزئ الجهد بالمقاومة  $R_i$ .

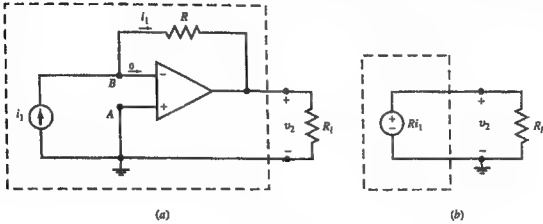
(ب) مكافئ ثنتين للدائرة التي في شكل (c) 5-39 مبين في شكل (d) 5-12 وهنا نحصل على :

$$v_{th} = 10 \text{ V} \quad \text{and} \quad R_{th} = 0$$

وأيضاً تكون  $v_2 = v_{th} = 10 \text{ V}$  لجميع قيم  $R_L$  ويكون جهد الخرج  $v_2$  معتمداً فقط على  $R_i$

$R_2$ ،  $R_1$  وغير متوقف على قيمة  $R_L$ .

5-17 أوجد كدالة للتيار  $i_1$  في الدائرة المبينة شكل (a) 5-40.



شكل 5-40

يسرى التيار  $i_1$  خلال المقاومة  $R$  وينشأ عنه الجهد  $-Ri_1$  على طرفيها من اليمين إلى اليسار . وحيث أن الطرف العاكس  $B$  جهده يساوى صفراً فإن الجهد السابق يظهر عند الخرج بقيمة  $v_2 = -Ri_1$  [انظر شكل (b) 5-40]. ولذلك فإن مكبر التشغيل يحول التيار  $i_1$  إلى الجهد  $v_2$  بكسب قيمته  $R$   $v_2/i_1 = R$ . ولا يعطى تيار المتبع  $i_1$  أى قدرة لأن الجهد  $v_{AB}$  على طرفيه يساوى صفراً.

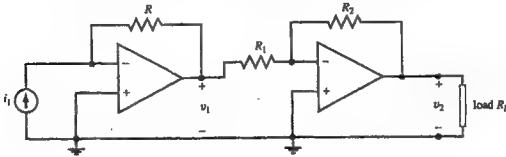
5-18 محول طاقة يولد تياراً ضعيفاً  $i_1$  الذى يقوم بتغذية الحمل  $R_L$  منتجاً جهداً  $v_1$  على طرفيه . المطلوب أن يكون الجهد  $v_1$  تابعاً للإشارة بكسب ثابت قيمته  $10^8$  بغض النظر عن قيمة  $R_L$ . صمم محول تيار - جهد لأداء هذا العرض .

يجب أن يغذى محول الطاقة  $R_L$  بطريقة غير مباشرة من خلال مكبر التشغيل . والتصميمات التالية ينتج عنها قيم  $i_1 = 10^8 v_1$  وهى غير متوقفة على قيمة  $R_L$  .

التصميم 1 : نختار  $R = 100 \text{ M}\Omega$  فى شكل 5-40 ومع هذا فإن المقاومة ذات القيمة العالية تكون غالية الثمن ويصعب توفرها فى الأسواق .

التصميم 2 : نحصل أيضاً على كسب التحويل الذى قيمته  $10^8 \text{ V/A}$  فى الدائرة المبينة شكل 5-41 . ويحول مكبر التشغيل الأول ذو المقاومة  $R=10^6$  التيار  $i_1$  إلى الجهد  $i_1 R = 10^6 v_1$  . ويكبر المكبر الثانى ذو الكسب 100 - (كشال  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  ،  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ ) الجهد  $v_1$

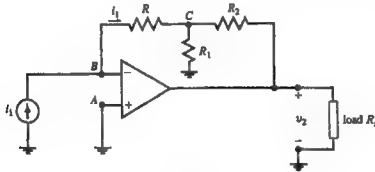
للجهد  $v_1 = 10^8 i_1$  و  $v_2 = -100 v_1$  . ونحتاج الدائرة إلى مكبرى تشغيل وثلاث مقاومات ( $1 \text{ M}\Omega$  ،  $100 \text{ k}\Omega$  ،  $1 \text{ k}\Omega$ ) التي تكون أقل تكلفة وأكثر احتمالاً لتواجدها في السوق .



شكل 5-41

التصميم 3 : انظر شكل 5-42 والمسألة 5-19 .

5-19 أوجد قيم المقاومات التي ينتج عنها كسب تحويل تيار إلى جهد بالقيمة  $v_2/i_1 = 10^8 \text{ V/A}$  في الدائرة المبينة شكل 5-42 .



شكل 5-42

استخدم KCL عند العقدة C . لاحظ أن  $v_B = v_A = 0$  لذلك :

$$\frac{v_C}{R} + \frac{v_C}{R_1} + \frac{v_C - v_2}{R_2} = 0$$

بتمويض  $v_C = R i_1$  والحل لإيجاد  $v_2$  نحصل على :

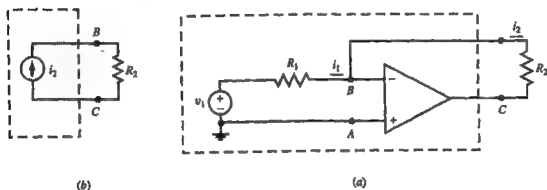
$$v_2 = -R_{eq} i_1 \quad \text{where } R_{eq} = R \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R} \right)$$

وللحصول على كسب تحويل  $v_2/i_1 = R_{eq} = 10^8 \text{ V/A} = 100 \text{ M}\Omega$  نحتاج لمقاومة ذو قيمة تحقق المعادلة التالية :

$$R \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R} \right) = 10^8 \Omega$$

أحد الحلول هو اختيار  $R_2 = 99 \text{ k}\Omega$  ،  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  ،  $R = 1 \text{ M}\Omega$  شكل 5-42 يستخدم مكبر تشغيل واحد وثلاث مقاومات التي لا تكون غالية الثمن ويمكن تواجدها .

5-20 أوجد  $i_2$  كدالة في الجهد  $v_1$  في الدائرة المينة شكل 5-43 .



شكل 5-43

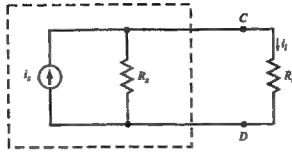
لدينا

$$v_B = v_A = 0 \quad i_1 = v_1/R_1 \quad i_2 = i_1 = v_1/R_1$$

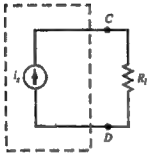
يحول مكبر التشغيل منبع الجهد إلى منبع تيار حر . ونسبة تحويل الجهد إلى تيار هي  $R_1$  وتكون غير متوقفة على المقاومة  $R_2$  .

5-21 يقوم منبع تيار حقيقى ( $i_2$  على التوازي مع مقاومة داخلية  $R_s$ ) مباشرة بتغذية حملا  $R_L$  كما في شكل 5-44(a) . (أ) أوجد تيار الحمل  $i_L$  . (ب) ضع مكبر تشغيل بين المنبع والحمل كما في شكل 5-44(b) . أوجد  $i_L$  وقارن مع الجزء (a) .

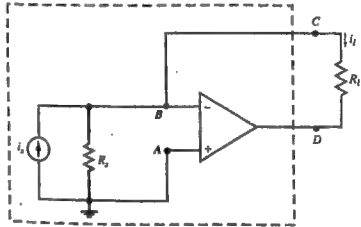




(a)



(c)

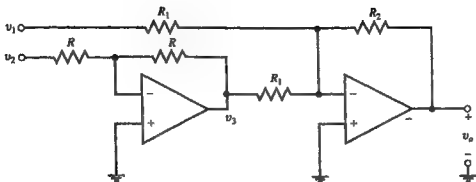


(b)

شكل 5-44

(أ) عند التوصيل المباشر كما فى شكل (a) 5-44 نجد أن :  $i_l = i_s R_s / (R_s + R_l)$  حيث يتغير مع  $R_l$ . (ب) فى شكل (b) 5-44 يجعل مكبر التشغيل الجهد  $V_B$  صفراً والذي يتسبب عنه أن يكون التيار فى المقاومة  $R_s$  صفراً. ولذلك فإن  $i_l = i_s$  والتي لا تعتمد على المقاومة  $R_l$ . وتقوم دائرة مكبر التشغيل بتحويل منبع التيار الحقيقى إلى منبع تيار مثالى. انظر شكل (c) 5-44.

5-22 أوجد  $V_0$  فى الدائرة المبينة شكل 5-45.



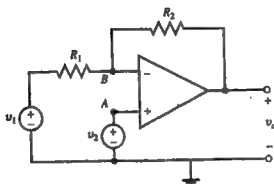
شكل 5-45

مكبر التشغيل الأول هو محول ذو كسب قيمته الوحدة مع  $v_3 = v_2$  ومكبر التشغيل الثانى هو دائرة تجميع ذات كسب قيمته  $-R_2/R_1$  لكلا الدخيلين  $v_1$ ،  $v_2$  ويكون الخرج :

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1}(v_1 + v_2) = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)$$

الدائرة هي مكبر فرقى .

5-23 أوجد  $v_0$  فى الدائرة المبينة شكل 5-46 .



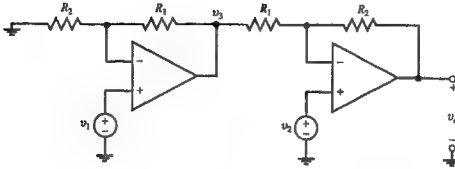
شكل 5-46

استخدم KCL عند العقدة B . لاحظ أن  $v_B = v_A = v_2$  لذلك :

$$\frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2 - v_o}{R_2} = 0$$

وبالحل لإيجاد  $v_0$  نحصل على  $v_0 = v_2 + (R_2/R_1)(v_2 - v_1)$  .

5-24 أوجد  $v_0$  فى الدائرة المبينة شكل 5-47 .



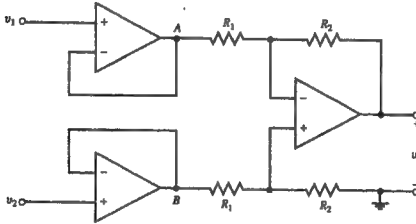
شكل 5-47

الجزء الأيسر من الدائرة ذو كسب قيمته  $(1 + R_1/R_2)$  . لذلك  $v_3 = (1 + R_1/R_2) v_1$  باستخدام

النتائج فى المسألة 5-23 وبالتعويض لقيم  $v_3$  يتج :

$$v_o = v_2 + \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_3) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_2 - \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)v_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)(v_2 - v_1)$$

5-25 فى شكل 5-48 اختيار المقاومات لكسب تفاضلى قيمته  $10^6$  ليكون  $v_0 = 10^6 (v_2 - v_1)$  .



شكل 5-48

مكبرا التشغيل الأماميان هما متابعان للجهد .

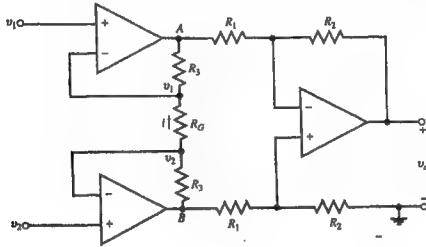
$$v_A = v_1 \quad \text{and} \quad v_B = v_2$$

من المعادلة (16) فى البند رقم 5-9 نجد أن :

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_B - v_A) = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)$$

وللحصول على الكسب التفاضلى  $10^6$  نختار  $R_2/R_1 = 10^6$  ،  $R_2 = 100 \text{ M}\Omega$  ،  $R_1 = 100 \Omega$  الدائرة المبينة شكل 5-48 يمكن أن يكون لها نفس الكسب كالتى فى شكل 5-45 ولكن تكون مقاومة الدخل ما لا نهاية . ومع هذا فهى تستخدم مقاومتين صغيرتين ومقاومتين كبيرتين حيث تخرجان عن النطاق المألوف .

5-26 المقاومات ذات القيم العالية والدقة تكون غالية . بين أنه فى الدائرة المبينة شكل 5-49 نستطيع استخدام مقاومات ذات قيم مألوفة بحيث أن  $v_0 = 10^6 (v_2 - v_1)$  .



شكل 5-49

مكبرا التشغيل الأماميان يحولان جهدى الدخل  $v_1$  ،  $v_2$  إلى طرفى المقاومة  $R_G$  الذى ينشأ عنه تيار لأعلى  $i = (v_2 - v_1) / R_G$  أيضاً يمر التيار أيضاً خلال المقاومتين  $R_3$  التى ينشأ عنه الفقد فى الجهد  $iR_3$  خلالهما ولذلك :

$$v_A = v_1 - R_3 i = v_1 - \frac{R_3}{R_G} (v_2 - v_1) \quad v_B = v_2 + R_3 i = v_2 + \frac{R_3}{R_G} (v_2 - v_1)$$

$$v_B - v_A = \left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right) (v_2 - v_1)$$

and

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_B - v_A) = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right) (v_2 - v_1)$$

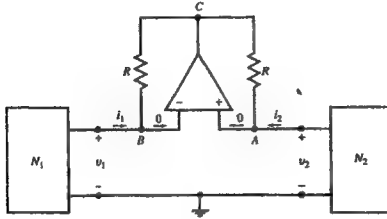
وللحصول على كسب تفاضلى  $10^6$  يجب أن يكون لدينا :

$$\frac{v_o}{v_2 - v_1} = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right) = 10^6$$

نختار  $R_3 = 5 \text{ M}\Omega$  ،  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$  ،  $R_1 = R_G = 1 \text{ k}\Omega$

الدائرة المبينة شكل 5-49 لها مقاومة دخل تساوى ما لا نهاية وباستخدام مقاومات ذات قيم فى الحدود المعتادة وكذلك باستخدام ثلاث مكبرات التشغيل .

5-27 بين أنه فى الدائرة لشكل 5-50 :  $i_1 = i_2$  بغض النظر عن الدائرتين  $N_1$  ،  $N_2$  .



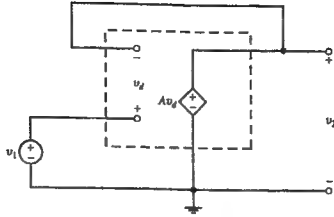
شكل 5-50

العقدتان A ، B لهما نفس الجهد  $v_A = v_B$  وحيث أن مكبر التشغيل لا يسحب تياراً فإن  $i_1$  ،  $i_2$  يمران خلال المقاومتين ويتطبق KVL حول الحلقة ABC لمكبر التشغيل فإننا نحصل على  $Ri_1 - Ri_2 = 0$  ولذلك فإن  $i_1 = i_2$  .

5-28 إذا كان  $N_1$  هى منبع جهد  $v_1$  ،  $N_2$  هى المقاومة  $R_2$  فى الدائرة المبينة شكل 5-50 فأوجد مقاومة الدخل  $R_{in} = v_1/i_1$  .

نحصل من مكبر التشغيل على  $v_A = v_B$  ،  $i_1 = i_2$  . ومن التوصيل إلى  $N_1$  و  $N_2$  يمكن الحصول على  $v_1 = v_B = v_2 = v_A$  و  $v_2 = -i_2 R_2$  على التوالى . وتكون مقاومة الدخل هى  $R_2 = -v_1/i_1 = -i_2 R_2 / i_2 = -R_2$  . وبذلك يكون مكبر التشغيل هو محول ذو مقاومة سالبة .

5-29 تابع جهد مكون من مكبر تشغيل ذو كسب محدد A للدائرة المفتوحة ومقاومة دخل  $R_{in} = \infty$  (انظر شكل 5-51) . أوجد الكسب  $G = v_2/v_1$  . وتعريف الحساسية s بأنها النسبة بين معدل التغير فى G ومعدل التغير فى A أوجد s .



شكل 5-51

من شكل 5-51 نحصل على  $v_2 = Av_d$ . باستخدام KVL حول المكبر نحصل على :

$$v_1 = v_d + v_2 = v_d + Av_d = v_d(1 + A) = v_2(1 + A)/A$$

$$G = \frac{v_2}{v_1} = \frac{A}{1 + A}$$

معدل التغير لقيمة G بالنسبة لـ A هي :

$$\frac{dG}{dA} = \frac{1}{(1 + A)^2} \quad \text{from which} \quad dG = \frac{dA}{(1 + A)^2}$$

النسبة المئوية للتغير الناشئ في G هي  $100 (dG/G)$  :

$$\frac{dG}{G} = \frac{dA}{(1 + A)^2} \times \frac{1 + A}{A} = \frac{1}{1 + A} \times \frac{dA}{A}$$

فتكون الحساسية :

$$s = \frac{dG/G}{dA/A} = \frac{1}{1 + A}$$

نسبة التغير في G تعتمد على A. جدول 5-8 يوضح بعض العينات لقيم  $dG/dA$  ، s .

جدول 5-8

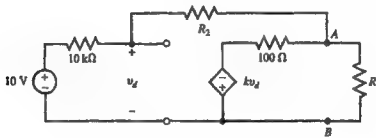
A	$G = v_2/v_1$	$dG/dA$	s
10	0.909	0.008	0.091
11	0.917	0.007	0.083
100	0.990	0.0001	0.01
1000	0.999	0	0

للقيم الكبيرة لـ A نجد أن الكسب G لا يتأثر كثيراً للتغير في A .

## مسائل إضافية

5-30 أعد المسألة رقم 5-3 باستبدال الدائرة التي على يسار العقدة B (متضمنة  $R_1$ ،  $R_2$ ،  $V_2$ ) بمكافئ ثنتين لها (انظر شكل 5-33). حل المسألة باستخدام النتائج بالمثل 5-4.

5-31 أوجد مكافئ ثنتين للدائرة التي على يسار العقدتين A-B في شكل 5-52 باعتبار  $k = 10$  للتالي. (أ)  $R_2 = \infty$ ، (ب)  $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$ . الجواب (أ)  $V_{th} = -100 \text{ V}$ ،  $R_{th} = 100 \Omega$ . (ب)  $V_{th} = -31.22 \text{ V}$ ،  $R_{th} = 37.48 \Omega$ .



شكل 5-52

5-32 أعد حل المسألة 5-31 لقيم  $k = 100$ ،  $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$ . الجواب:  $V_{th} = 47.16 \text{ V}$ ،  $R_{th} = 5.66 \Omega$ .

5-33 أحسب العلاقة بين  $R$ ،  $R_1$ ،  $R_2$  في شكل 5-41 بحيث يكون كسب الدائرة هو  $V_2/I_1 = 10^6$  V/A. الجواب:  $RR_2/R_1 = 10^6$ .

5-34 في الدائرة المبينة شكل 5-13:  $V_{cc} = 10 \text{ V}$ ،  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ،  $V_1 = 1 \text{ V}$ . أوجد القيمة العظمى للمقاومة  $R_2$  قبل حدوث حالة التشبع لكبر التشغيل. الجواب:  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ .

5-35 إذا كانت دائرة التجميع كشكل 5-14 لها دخلان باعتبار  $V_1 = 1$ ،  $V_2 = \sin t$  (V). ضع  $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$ ،  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ ،  $R_f = 8 \text{ k}\Omega$ . استخدم طريقة التراكب للحصول على  $V_0$ . الجواب:  $V_0 = -(8/3) + (8/5) \sin t$ .

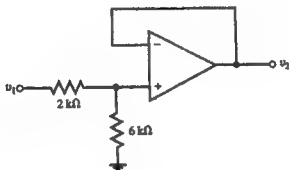
5-36 في شكل 5-17 ضع  $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ ،  $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$  استخدم طريقة التراكب للحصول على  $V_0$  بدلالة جهود الدخل. الجواب:  $V_0 = V_1 + V_2 + V_3$ .

5-37 أوجد مقاومة الدخل من ناحية  $V_f$  في شكل 5-19. الجواب:  $R_{in} = 2R_1$ .

5-38 استخدم طريقة التراكب للحصول على  $v_0$  في شكل 5-20 لقيم  $R_1 = 2$ ،  $R_2 = 7$ ،  $R_3 = 10$ ،  $R_4 = 5$  وجميع القيم بالكيلو أوم. الجواب:  $v_0 = 1.5 v_2 - 3.5 v_1$ .

5-39 في الدائرة المبينة 5-20 أوجد (أ)  $v_0$  لقيم  $R_1 = 1$ ،  $R_2 = 3$ ،  $R_3 = 2$ ،  $R_4 = 2$  وجميع القيم بالكيلو أوم. (ب) مقاومة الدخل  $R_{2in}$  من ناحية  $v_2$ . (ج) التيار  $i_1$  كدالة للجهد  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_0$  أن تغذي حملاً متغيراً يعتمد على  $v_2$ . الجواب: (أ)  $v_0 = 2v_2 - 3v_1$ . (ب)  $R_{2in} = 4$  k $\Omega$ . (ج)  $v_1 = v_2/2$ .

5-40 باستخدام مكبر تشغيل واحد صمم مكبر آلة ذو كسب  $v_2/v_1 = 3/4$  ومقاومة دخل  $8$  k $\Omega$  ومقاومة خرج تساوى صفراً.



شكل 5-33

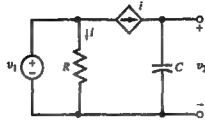
5-41 بين أنه إذا كانت  $R_2 = 0$ ،  $R_1 = \infty$  فإن التشغيل الغير عاكس اللاتحويلي للدائرة المبينة في شكل 5-15 والمعادلة (12) يؤول إلى تابع جهد.

5-42 في الدائرة المبينة شكل 5-22 ضع  $R_3 = 10$  k $\Omega$ . (أ) أوجد  $R_F$  بحيث يكون  $i_g = 0$ . (ب) هل  $R_F$  لا تعتمد على  $R_8$  ناقش الجواب: (أ)  $40$  k $\Omega$ . (ب) نعم.

5-43 إذا كان الدخل للدائرة المبينة شكل 5-23 باعتبار  $RC = 1$  هو  $v_1 = \sin \omega t$ . أكتب KCL عند العقدة B وحل لإيجاد  $v_2$ . الجواب:  $v_2 = -(1/\omega) \cos \omega t + C$ .

5-44 بين أن جهد الخرج  $v_2$  لشكل 5-54 هو نفسه الخرج في المكامل شكل 5-23.





شكل 5-54

5-45 أوجد الجهد  $v_2$  في المكامل المسرب لشكل 5-24 باعتبار :  $C = 1\mu f$  ,  $R_1 = R_f = 1k\Omega$  ,  $v_1 = \begin{cases} 1V & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$v_2(t) = \begin{cases} -1 + e^{-1000t} (V) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{الجواب :}$$

5-46 أعد حل المسألة 5-45 لقيم :  $v_1 = \begin{cases} 1V & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$

$$v_2(t) = \begin{cases} -e^{-1000t} (V) & t > 0 \\ -1V & t < 0 \end{cases} \quad \text{الجواب :}$$

5-47 إذا كان للمعادلة التفاضلية  $10^{-2} dv_2/dt + v_2 = v_3$  الجهد  $v_3$  هو الدالة المؤثرة والجهد  $v_2$  هو

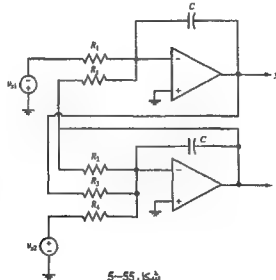
التجاوب . صمم دائرة مكبر تشغيل للحصول على  $v_2$  من  $v_3$  . الجواب : انظر شكل 5-24

. باعتبار  $R_1 = R_f = R$  ,  $RC = 10^{-2}$  ,  $v_1 = -v_3$  .

5-48 صمم دائرة مكبر تشغيل لحل المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} y' + x &= v_{i1} \\ 2y + x' + 3x &= -v_{i2} \end{aligned}$$

الجواب : انظر شكل 5-55 باعتبار  $R_1C = 1s$  ,  $R_2C = (1/3)s$  ,  $R_3C = (1/2)s$  .



شكل 5-55



## الفصل السادس

### الإشارات والأشكال الموجبة

#### 6.1 مقدمة

نوصف الجهود والتيارات في الدوائر الكهربائية بثلاثة أقسام بالنسبة لدوال الزمن .

(i) دوال دورية .

(ii) دوال غير دورية .

(iii) دوال عشوائية .

في هذا الفصل يكون مجال الزمن لجميع الدوال هو  $-\infty < t < +\infty$  - ومستخدم بعض الاصطلاحات بصفة متكررة مثل الإشارة والدالة والشكل الموجي .

#### 6.2 الدوال الدورية :

تكون الإشارة  $v(t)$  دورية بدورة  $T$  إذا كان .

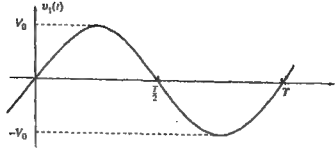
$$v(t) = v(t + T) \quad \text{for all } t$$

وفيما يلي أربعة أنواع من الدوال الدورية التي لها فترة دورة  $T$  وبيانها كالتالي :

(أ) الموجة الجيبية :

$$v_1(t) = V_0 \sin 2\pi t/T \quad (1)$$

انظر شكل 6-1(a) :

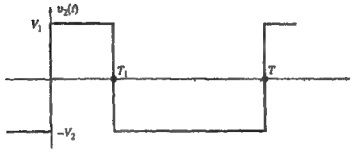


شكل 6-1 (a)

(ب) النبضة الدورية :

$$v_2(t) = \begin{cases} V_1 & \text{for } 0 < t < T_1 \\ -V_2 & \text{for } T_1 < t < T \end{cases} \quad (2)$$

انظر شكل 6-1(b) :

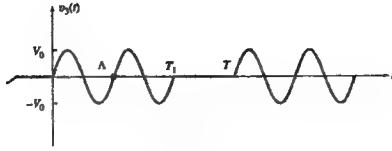


شكل 6-1 (b)

(ج) الدفعة المنتظمة الدورية :

$$v_3(t) = \begin{cases} V_0 \sin 2\pi t / \Lambda & \text{for } 0 < t < T_1 \\ 0 & \text{for } T_1 < t < T \end{cases}$$

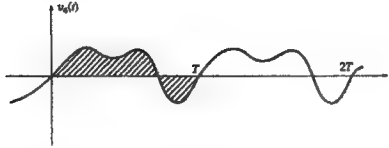
حيث  $T = kA$  ،  $k$  هي عدد صحيح . انظر شكل 6-1(c) :



شكل 6-1 (c)

(د) تكرار دورى تسجيلى كل ثانية T :

انظر شكل 6-1(c):



شكل 6-1 (d)

أحياناً تكون الإشارات الدورية مركبة جداً ومع هذا فإنه يمكن تمثيلها بمجموعة من الدوال الجيبية. كما سنرى فى الفصل 17.

### 6.3 الدوال الجيبية

الجهد الجيبى  $v(t)$  يعطى بالمعادلة :

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

حيث  $V_0$  هى القيمة العظمى،  $\omega$  هى السرعة الزاوية أو التردد الزاوى  $\theta$  وهى زاوية الوجه.

ويمكن التعبير عن السرعة الزاوية  $\omega$  بدلالة الدورة  $T$  أو بالتردد  $f$  حيث  $f = 1/T$ . ووحدة قياس التردد هى هيرتز Hz أو دورات/ ثانية. وحيث أن  $\cos \omega t = \cos(\omega t + 2\pi)$  وأيضاً  $T$  نعرف من

العلاقة  $\omega T = 2\pi$  . وحيث أن الجهد  $v(t)$  يحتاج إلى  $T$  ثانية ليعود إلى قيمته الأصلية فإن ذلك يستغرق  $1/T$  من الدورات في الثانية الواحدة .

ويمكن تلخيص علاقات الدوال الجيبية بالتالي

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f \quad f = 1/T = \omega/2\pi \quad T = 1/f = 2\pi/\omega$$

**مثال 6-1 :** ارسم كل من الدوال التالية وحدد دورتها وترددها .

$$\begin{aligned} (a) v_1(t) &= \cos t & (b) v_2(t) &= \sin t & (c) v_3(t) &= 2 \cos 2\pi t \\ (d) v_4(t) &= 2 \cos (\pi t/4 - 45^\circ) = 2 \cos (\pi t/4 - \pi/4) = 2 \cos [\pi(t-1)/4] \\ (e) v_5(t) &= 5 \cos (10t + 60^\circ) = 5 \cos (10t + \pi/3) = 5 \cos 10(t + \pi/30) \end{aligned}$$

- (a) See Fig. 6-2(f).  $T = 2\pi = 6.2832 \text{ s}$  and  $f = 0.159 \text{ Hz}$ .  
 (b) See Fig. 6-2(b).  $T = 2\pi = 6.2832 \text{ s}$  and  $f = 0.159 \text{ Hz}$ .  
 (c) See Fig. 6-2(c).  $T = 1 \text{ s}$  and  $f = 1 \text{ Hz}$ .  
 (d) See Fig. 6-2(d).  $T = 8 \text{ s}$  and  $f = 0.125 \text{ Hz}$ .  
 (e) See Fig. 6-2(e).  $T = 0.2\pi = 0.62832 \text{ s}$  and  $f = 1.59 \text{ Hz}$ .

**مثال 6-2 :** ارسم الدالة  $v(t) = 5 \cos \omega t$  بدلالة  $\omega t$  .

انظر شكل 6-3 :

## 6.4 الإزاحة الزمنية وإزاحة الوجه

إذا تأخرت الدالة  $v(t) = \cos \omega t$  بالفترة  $\tau$  ثانية نحصل على .

$$v(t - \tau) = \cos \omega(t - \tau) = \cos (\omega t - \theta) \quad \text{حيث } \theta = \omega\tau$$

اليمين بقيمة تعادل  $\tau$  ثانية وهي مناظرة إلى تأخر وجهي  $\theta = \omega\tau = 2\pi\tau/T$  . والإزاحة الزمنية إلى اليسار التي قيمتها  $\tau$  ثانية في الشكل ينتج عنها  $v(t + \tau)$  مبنياً تقدم لزاوية الوجه تسمى التقدم .

وبالعكس فإن الإزاحة الوجهية  $\theta$  تؤول إلى إزاحة زمنية  $\tau$  . ولذلك فإنه لإزاحة وجهية معينة كلما كبر التردد كلما صغرت الإزاحة الزمنية اللازمة .

**مثال 6-3 :** ارسم  $v(t) = 5 \cos (\pi t/6 + 30^\circ)$  بالنسبة لقيم  $t$  وقيم  $\pi t/6$  .

أعد كتابة المطلوب كالتالي :

$$v(t) = 5 \cos (\pi t/6 + \pi/6) = 5 \cos [\pi(t + 1)/6]$$

وهذه دالة جيب تمام لها دورة 12 s ، متقدمة بالزمن 1s أى أن الشكل مزاح إلى اليسار بقيمة 1s أو  $30^\circ$  كما هو مبين فى شكل 6-4.

مثال 6-4: افترض دائرة خطية لها قيم دخل - خرج صحيحة لجميع قيم  $\omega$  ،  $A$  . كما يلى .

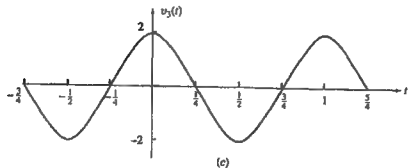
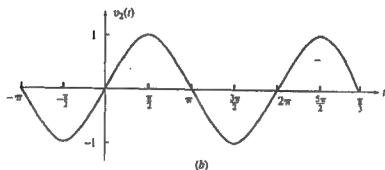
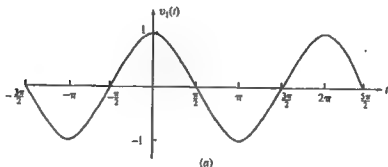
$$v_i(t) = A \cos \omega t \text{ الدخل}$$

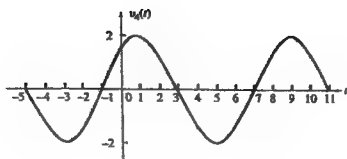
$$V_o(t) = A \cos (\omega t - \theta) \text{ الخرج}$$

فإذا كان  $V_i(t) = A \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$  أوجد  $V_o(t)$  عندما

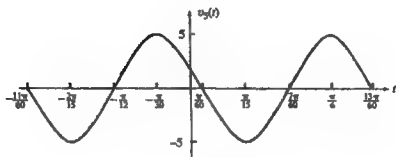
( أ )  $\theta = 10^6$  (إزاحة الوجه تتناسب مع التردد كما فى شكل (6-5(a) .

( ب )  $\theta = 10^{-6}$  (إزاحة الوجه ثابتة كما فى شكل (6-5(b) .



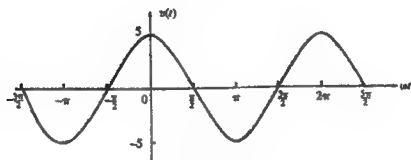


(d)

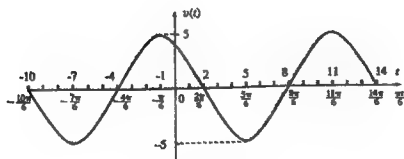


(e)

شکل 6-2

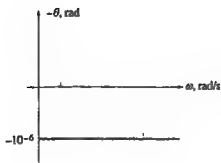


شکل 6-3

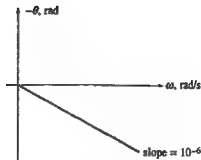


شکل 6-4





(b)



(a)

شكل 6-5

جهد الخرج هو  $v_0(t) = \cos(\omega_1 t - \theta_1) + \cos(\omega_2 t - \theta_2)$ .

$\theta_1 = 10^{-6} \omega_1$  و  $\theta_2 = 10^{-6} \omega_2$  (أ) ومن ثم

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \cos(\omega_1 t - 10^{-6} \omega_1) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6} \omega_2) \\ &= \cos \omega_1(t - 10^{-6}) + \cos \omega_2(t - 10^{-6}) = v_1(t - 10^{-6}) = v_1(t - \tau) \end{aligned}$$

حيث  $\tau = 10^{-6} \text{ s} = 1 \mu\text{s}$ . ولما كانت إزاحة الوجه تتناسب مع  $\omega$  فإنها توفر جميع مركبات الدخل بالزمن  $1 \mu\text{s}$  [شكل 6-5(a)] ويتبع الخرج الدخل بدون أى إنحراف.

(ب)  $\theta_1 = \theta_2 = 10^{-6}$  ومن ثم :

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \cos(\omega_1 t - 10^{-6}) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6}) \\ &= \cos \omega_1(t - 10^{-6}/\omega_1) + \cos \omega_2(t - 10^{-6}/\omega_2) \end{aligned}$$

إزاحة الوجه الثابت [شكل 6-5(b)] تعمل على تأخير مركبات الدخل المعتمدة على التردد ولكن بقيم مختلفة. ويكون الخرج منحرفاً عن الدخل.

## 6.5 الدوال الدورية المركبة

يعتبر مجموع دالتين دوريتين بزمان دورى  $T_1$ ،  $T_2$  دالة دورية أيضاً إذا كان الزمن الدورى المشترك  $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$  حيث  $n_1$ ،  $n_2$  أعداد صحيحة. وهنا يتطلب أن تكون  $T_1/T_2 = n_2/n_1$  عدد جبرى وإلا فإن الجمع لا يتبع عنه دالة دورية.

**مثال 6-5:** أوجد الزمن الدورى للمعادلة  $v(t) = \cos 5t + 3 \sin(3t + 45^\circ)$ . الزمن الدورى لـ  $\cos 5t$  هو  $T_1 = 2\pi/5$  والزمن الدورى لـ  $3 \sin(3t + 45^\circ)$  هو  $T_2 = 2\pi/3$ .

بأخذ أصغر مضروب مشترك لكل من  $T_1$ ،  $T_2$  وليكن  $3T_2 = 5T_1 = 2\pi = T$ . نلاحظ أن  

$$v(t + T) = v(t) \text{ حيث :}$$

$$v(t + T) = \cos 5(t + 2\pi) + 3 \sin [3(t + 2\pi) + 45^\circ] = \cos 5t + 3 \sin (3t + 45^\circ) = v(t)$$

لذلك فإن فترة تعاقب الدالة  $v(t)$  هو  $2\pi$ .

**مثال 6-6:** هل الدالة  $v(t) = \cos t + \cos 2\pi t$  دورية؟

ناقش دورة  $\cos t$  هي  $T_1 = 2\pi$  ودورة  $\cos 2\pi t$  هي  $T_2 = 1$ . ولذلك فإنه لا توجد دورة مشتركة  $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$  لأن  $T_1/T_2 = 2\pi$  وهو عدد ليس جذرياً. لذلك  $v(t)$  ليست دورية.

**مثال 6-7:** إذا كان  $p = 3.4$  أوجد دورة الدالة  $v(t) = \cos t + \cos 2pt$

دورة  $\cos t$  هي  $T_1 = 2\pi$  ودورة  $\cos 2\pi t$  هي  $T_2 = \pi/3.14$ . النسبة  $T_1/T_2 = 6.28$  وهو عدد جذري والعدين الصحيحين  $n_1 = 25$ ،  $n_2 = 157$  يحققان العلاقة  

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = 628/100 = 157/25$$
  

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = 50\pi \text{ s}$$

### التمثيلات المثلثية

جدول 6-1 يحتوى على التماثلات المثلثية ذات النفع الكبير فى دراسة تحليل الدوائر.

جدول 6-1

$\sin a = -\sin (-a)$	(5a)
$\cos a = \cos (-a)$	(5b)
$\sin a = \cos (a - 90^\circ)$	(5c)
$\cos a = \sin (a + 90^\circ)$	(5d)
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$	(6a)
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$	(6b)
$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$	(7a)
$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$	(7b)
$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	(8a)
$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	(8b)
$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos (a - b) - \frac{1}{2} \cos (a + b)$	(9a)
$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin (a + b) + \frac{1}{2} \sin (a - b)$	(9b)
$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos (a + b) + \frac{1}{2} \cos (a - b)$	(9c)
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$	(10a)
$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$	(10b)

**مثال 6-8:** صبر عن  $v(t) = \cos 5t \sin (3t + 45^\circ)$  كمجموع دالتين لجيب التمام وأوجد دورتها .

$$\begin{aligned} v(t) &= \cos 5t \sin (3t + 45^\circ) = [\sin (8t + 45^\circ) - \sin (2t - 45^\circ)]/2 \quad [\text{Eq. (9b)}] \\ &= [\cos (8t - 45^\circ) + \cos (2t + 45^\circ)]/2 \quad [\text{Eq. (5c)}] \end{aligned}$$

دورة الدالة  $v(t)$  هي  $\pi$  .

## 6.6 القيم المتوسطة والقيم الفعالة (RMS)

الدالة الدورية  $f(t)$  التي لها زمن دورى  $T$  يكون لها قيمة متوسطة  $F_{avg}$  كالتالى :

$$F_{avg} = \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (11)$$

قيمة جذر متوسط المربعات (rms) ويطلق عليها القيمة الفعالة للدالة  $f(t)$  أثناء نفس زمنها الدورى تعرف بالتالى :

$$F_{eff} = F_{rms} = \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt \right]^{1/2} \quad (12)$$

من الملاحظ أن  $F_{eff}^2 = [f^2(t)]$  .

القيم المتوسطة والفعالة للدوال الدورية تحسب عادة خلال دورة واحدة .

**مثال 6-9:** أوجد القيم المتوسطة والفعالة لموجة جيب التمام  $v(t) = V_m \cos (\omega t + \theta)$  .

باستخدام المعادلة (11) .

$$V_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^T V_m \cos (\omega t + \theta) dt = \frac{V_m}{\omega T} [\sin (\omega t + \theta)]_0^T = 0 \quad (13)$$

وباستخدام المعادلة (12) .

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2 (\omega t + \theta) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T V_m^2 [1 + \cos 2(\omega t + \theta)] dt = V_m^2/2$$

ومنها

$$V_{eff} = V_m / \sqrt{2} = 0.707 V_m \quad (14)$$

تبيين المعادلتان (13)، (14) أن النتائج لا تعتمد على التردد أو زاوية الوجه  $\theta$  أى أن متوسط موجة جيب التمام وقيمة rms هى دائماً  $0.707 V_m$  على التوالى .

مثال 6-10: أوجد  $V_{eff}$ ،  $V_{avg}$  لنصف الموجة الجيبية الموحدة .

$$v(t) = \begin{cases} V_m \sin \omega t & \text{when } \sin \omega t > 0 \\ 0 & \text{when } \sin \omega t < 0 \end{cases} \quad (15)$$

ومن المعادلة (11) :

$$V_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m \sin \omega t \, dt = \frac{V_m}{\omega T} [-\cos \omega t]_0^{T/2} = V_m / \pi \quad (16)$$

ومن المعادلة (12) :

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m^2 \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2T} \int_0^{T/2} V_m^2 (1 - \cos 2\omega t) \, dt = V_m^2 / 4$$

والتي منها :

$$V_{eff} = V_m / 2 \quad (17)$$

مثال 6-11: أوجد  $V_{eff}$ ،  $V_{avg}$  الدالة الدورية  $v(t)$  لفترة دورية واحدة  $T$  .

$$v(t) = \begin{cases} V_0 & \text{for } 0 < t < T_1 \\ -V_0 & \text{for } T_1 < t < 3T_1 \end{cases} \quad \text{Period } T = 3T_1 \quad (18)$$

للحصول على

$$V_{avg} = \frac{V_0}{3T} (T_1 - 2T_1) = \frac{-V_0}{3} \quad (19)$$

$$V_{eff}^2 = \frac{V_0^2}{3T} (T_1 + 2T_1) = V_0^2 \quad \text{و}$$

ومنها

$$V_{eff} = V_0 \quad (20)$$

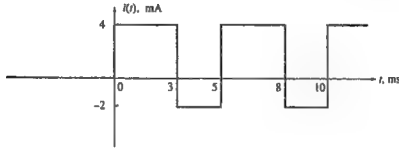
ويمكن تعميم النتائج السابقة كالتالى : إذا كان  $v(t) = V_0$  فإن  $V_{eff} = V_0$  .

مثال 6-12: أحسب متوسط القدرة المستهلكة من 0 إلى  $T$  فى المقاومة المتصلة بجهد  $v(t)$  . استبدل  $v(t)$  بجهد ثابت  $V_{dc}$  . أوجد الجهد  $V_{dc}$  بحيث تكون القدرة المستهلكة خلال تلك الفترة واحدة .

$$p = vi = v^2/R$$

$$P_{avg} = \frac{1}{RT} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{1}{R} V_{eff}^2 = \frac{V_{dc}^2}{R} \quad \text{or} \quad V_{dc} = V_{eff}$$

**مثال 6-13:** التيار  $i(t)$  المبين شكل 6-6 يمر خلال مكثف  $1\text{-}\mu\text{F}$ . أوجد (أ) الجهد  $v_{ac}$  على طرفي المكثف عند الأزمنة  $t = 5k \text{ ms}$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ). (ب) قيمة التيار الثابت للمنبع  $I_{dc}$  الذي ينشأ عنه نفس الجهد على نفس المكثف عند  $t = 5k \text{ ms}$  مع ملاحظة أن  $t > 0$ . قارن قيمة  $I_{dc}$  مع  $[i(t)]$ . وهى القيمة المتوسطة للتيار  $i(t)$  شكل 6-6 لفترة زمنية  $5 \text{ ms}$  بعد  $t > 0$ .



شكل 6-6

(أ) عند  $t = 5 \text{ ms}$

$$v_{ac} = \frac{1}{C} \int_0^{5 \times 10^{-3}} i(t) dt = 10^6 (10^{-3}) \left[ \int_0^{3 \times 10^{-3}} 4 dt - \int_{3 \times 10^{-3}}^{5 \times 10^{-3}} 2 dt \right] = 12 - 4 = 8 \text{ V}$$

وهو التأثير الحقيقى لتيار الشحن خلال كل فترة مقدارها  $5 \text{ ms}$ . وكل  $5 \text{ ms}$  تضاف الكمية السابقة إلى جهد المكثف. لذلك فإنه عند  $t = 5 \text{ ms}$  فإن  $v = 8 \text{ k(V)}$ .

(ب) مع التيار الثابت  $I_{dc}$  فإن جهد المكثف  $v_{dc}$  عند  $t = 5k \text{ ms}$  هو :

$$v_{dc} = \frac{1}{C} \int_0^{5k \times 10^{-3}} I_{dc} dt = 10^6 (I_{dc}) (5k \times 10^{-3}) = 10^3 (5k)(I_{dc}) \quad (\text{V})$$

وحيث أن  $v_{dc} = v_{ac}$  عند  $5k \text{ ms}$  فإنه:

$$10^3 (5k)(I_{dc}) = 8k \quad \text{or} \quad I_{dc} = 8k / (5k \times 10^3) = 1.6 \times 10^{-3} \text{ A} = 1.6 \text{ mA}$$

لاحظ أن  $I_{dc} = [i(t)]$  لشكل 6-6 لأى فترة زمنية مقدارها  $5 \text{ ms}$  عند  $t > 0$ .

## 6.7 الدوال الغير دورية

لا يمكن تعريف الدالة الغير دورية لجميع الأزمنة ببساطة بواسطة جزء معين منها . والأمثلة على الدوال الغير دورية هي :

$$(a) \quad v_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$(b) \quad v_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1/T & \text{for } 0 < t < T \\ 0 & \text{for } t > T \end{cases} \quad (22)$$

$$(c) \quad v_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ e^{-t/\tau} & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$(d) \quad v_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ \sin \omega t & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$(e) \quad v_5(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ e^{-t/\tau} \cos \omega t & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$(f) \quad v_6(t) = e^{-t/\tau} \quad \text{for all } t \quad (26)$$

$$(g) \quad v_7(t) = e^{-a|t|} \quad \text{for all } t \quad (27)$$

$$(h) \quad v_8(t) = e^{-a|t|} \cos \omega t \quad \text{for all } t \quad (28)$$

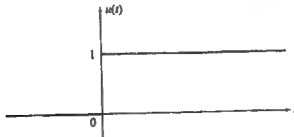
كثير من هذه الدوال تستخدم في التمثيل الرياضى وبناء نماذج للإشارات الحقيقية لتحليل وتصميم الدوائر الكهربائية وستناقش الأمثلة فى البنود التالية :

## 6.8 دالة الوحدة السلمية

تعرف دالة الوحدة السلمية (بغض النظر عن مقياس الرسم) بالتالى :

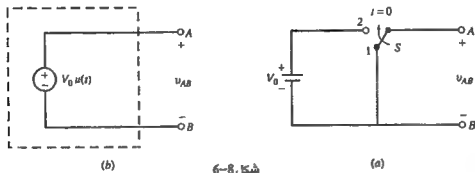
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (29)$$

ورسم الدالة مبين بشكل 6-7 . لاحظ أن الدالة غير معرفة عند  $t = 0$  .



شكل 6-7

ليبيان استخدام  $u(t)$  أن المفتاح  $S$  في الدائرة شكل 6-8(a) في الوضع 1 عند الزمن  $t < 0$  ثم تحرك للوضع 2 عند الزمن  $t = 0$ . الجهد على الطرفين A-B يمكن اعتباره  $v_{AB} = V_0 u(t)$ . وبيان الدائرة المكافئة للجهد الوحدة في شكل 6-8(b).



شكل 6-8

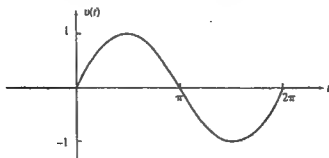
**مثال 6-14:** إذا كان المفتاح في الدائرة المبينة شكل 6-8(a) تحرك إلى الوضع 2 عند الزمن  $t = t_0$  عبر عن الجهد  $v_{AB}$  باستخدام دالة الوحدة.

ظهور الجهد  $V_0$  على الطرفين A-B يتأخر حتى  $t = t_0$ . استبدل الحد  $t$  في دالة الوحدة بالقيمة  $t - t_0$  وبذلك نحصل على  $v_{AB} = V_0 u(t - t_0)$ .

**مثال 6-15:** إذا كان المفتاح في شكل 6-8(a) تحرك للوضع 2 عند الزمن  $t = 0$  ثم أرجع إلى الوضع 1 عند الزمن  $t = 5$  s عبر عن الجهد  $v_{AB}$  باستخدام دالة الوحدة.

$$v_{AB} = V_0 [u(t) - u(t - 5)]$$

**مثال 6-16:** عبر عن الجهد  $v(t)$  المرسوم في شكل 6-9 باستخدام دالة الوحدة.



شكل 6-9

$$v(t) = [u(t) - u(t - 2\pi)] \sin t$$

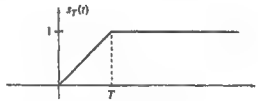
## 6.9 دالة الوحدة الدفعية

إذا رجعنا إلى الدالة  $s_T(t)$  المرسومة في شكل 6-10(a) التي تساوى صفراً عند  $t = 0$  وتزداد بانتظام من 0 إلى 1 في الزمن  $T$  ثانية. فإن المشتقة الأولى لها  $d_T(t)$  هي نبضة فترتها الزمنية  $T$  وارتفاعها  $1/T$  كما هو مبين في شكل 6-10(b).

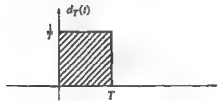
$$d_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1/T & \text{for } 0 < t < T \\ 0 & \text{for } t > T \end{cases} \quad (30)$$

إذا نقصت الفترة الانتقالية  $T$  فإن النبضة في شكل 6-10(b) تصبح أضيق وأطول ولكن المساحة للنبضة تظل مساوية للقيمة واحد. وإذا سمحنا للفترة  $T$  أن تقترب من الصفر فإنه في النهاية تصبح الدالة  $s_T(t)$  دالة وحدة سلمية  $u(t)$  وتصبح مشتقتها وحدة دفعية  $\delta(t)$  ذات عرض يساوى صفر وارتفاع ما لا نهاية ودالة الوحدة الدفعية  $\delta(t)$  موضحة في شكل 6-10(c) ويمكن التعبير عن دالة الوحدة الدفعية أو دالة دلتا كما يلي:

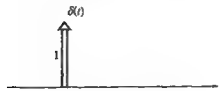
$$\delta(t) = 0 \quad \text{for } t \neq 0 \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (31)$$



(a)



(b)



(c)

شكل 6-10



والدفعة التي هي نهاية نبضة ضيقة ذو المساحة  $A$  يعبر عنها  $A\delta(t)$ . وأحياناً يطلق على قيمة  $A$  بقوة الدفعة. ودفعة الوحدة التي تحدث عن الزمن  $t = t_0$  يعبر عنها بالقيمة  $\delta(t - t_0)$ .

**مثال 6-17:** إذا كان الجهد على طرفي مكثف  $100\text{-nF}$  يزداد تدريجياً من  $0$  إلى  $10\text{V}$  متخذاً شكل الدالة  $s_T(t)$  المبينة شكل (6-10(a)). أوجد (أ) الشحنة على المكثف عند  $t = T$ ، (ب) التيار  $i_C(t)$  للمكثف عند الأزمنة  $T = 1\text{ ms}$ ،  $T = 1\text{ }\mu\text{s}$ ،  $T = 1\text{ s}$ .

(أ) عند  $t = T$ ،  $V_C = 10\text{ V}$ . فإن الشحنة على المكثف تكون  $Q = CV_C = 10^{-7} \times 10 = 10^{-6}$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} \quad (\text{ب})$$

من شكل 6-10:

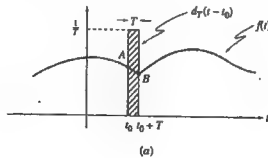
$$i_C(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ I_0 = 10^{-6}/T & \text{for } 0 < t < T \\ 0 & \text{for } t > T \end{cases} \quad (\text{A}) \quad (32)$$

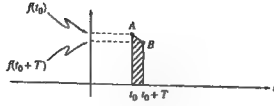
لقيم  $T = 1\text{ s}$ ،  $I_0 = 10^{-6}$ ، عند  $T = 1\text{ ms}$ ،  $I_0 = 10^{-3}\text{ A}$ ، عند  $T = 1\text{ }\mu\text{s}$ ،  $I_0 = 1\text{ A}$ . في جميع الحالات السابقة تكون الشحنة المجمعة على المكثف في نهاية الفترة الانتقالية هي:

$$Q = \int_0^T i_C(t) dt = I_0 T = 10^{-6}\text{ C}$$

ولا تعتمد الشحنة عند  $t = T$  على  $T$ . وتعمل على توليد جهد  $V_C = 10\text{ V}$  على طرفي المكثف.

**مثال 6-18:** إذا كان  $dT(t - t_0)$  تمثل نبضة دقيقة بعرض  $T$  وارتفاع  $1/T$  التي تبدأ عند  $t = t_0$ . وباعتبار الدالة  $f(t)$  التي تكون مستمرة بين  $t_0$ ،  $t_0 + T$  كما هو مبين شكل (6-11(a)). أوجد الحد للفترة  $I$  للمعادلة (33) حينما تقترب  $T$  من الصفر.





(b)

شكل 6-11

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d_T(t - t_0) f(t) dt \quad (33)$$

$$d_T(t - t_0) = \begin{cases} 1/T & t_0 < t < t_0 + T \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

بالتعويض لقيمة  $d_T$  في المعادلة (33) نحصل على :

$$I = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = \frac{S}{T} \quad (34a)$$

حيث  $S$  هي المساحة المظللة تحت الدالة  $f(t)$  بين  $t_0$  ،  $t_0 + T$  في شكل 6-11(b). وباعتبار قيمة  $T$  صغيرة فإنه يمكن تقريب الدالة  $f(t)$  بالخط المستقيم الواصل بين  $A$  ،  $B$  . وتكون  $S$  المساحة الناتجة عن شبه المنحرف .

$$S = \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)] T \quad (34b)$$

$$I = \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)] \quad (34c)$$

As  $T \rightarrow 0$ ,  $d_T(t - t_0) \rightarrow \delta(t - t_0)$  and  $f(t_0 + T) \rightarrow f(t_0)$  and from (34c) we get

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)] \quad (34d)$$

وقد اعتبرنا أن الدالة  $f(t)$  مستمرة بين  $t_0$  ،  $t_0 + T$  لذلك :

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = f(t_0) \quad (34e)$$

ولكن

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt \quad (34f)$$

ومن ثم

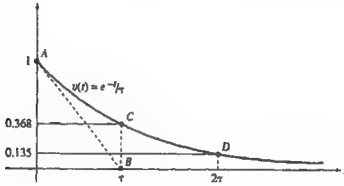
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) \quad (34g)$$

والمطابقة (34g) تسمى الخاصية الدقيقة لدالة الدفعة . وتستخدم أيضاً كتعريف بديل لـ  $\delta(t)$  .

## 6.10 الدالة الأسية

تسمى الدالة  $f(t) = e^{st}$  حيث  $s$  هو ثابت مركب بالدالة الأسية. وهى تتناقص مع الزمن إذا كان الجزء الحقيقى من قيمة  $s$  سالباً وتزداد إذا كان الجزء الحقيقى من  $s$  موجباً. وستناقش القيم الأسية  $e^{at}$  التى فيها الثابت  $a$  رقماً حقيقياً.

ومقلوب الثابت  $a$  يقاس بوحدات الزمن ويسمى ثابت الزمن  $\tau = 1/a$ . وشكل 6-12 يبين قيمة أسية متناقصة  $e^{-t/\tau}$  كممتغير بالنسبة لـ  $t$  وتتناقص الدالة من القيمة واحد عند  $t = 0$  للقيمة صفر عند  $t = \infty$ . وبعد  $\tau$  من الثوانى فإن الدالة  $e^{-t/\tau}$  تصل القيمة  $e^{-1} = 0.368$ . وعند  $\tau = 1$  فإن الدالة  $e^{-t}$  تسمى أسية معتادة وهى مثل  $e^{-t/\tau}$  حينما ترسم كممتغير بالنسبة لـ  $t/\tau$ .



شكل 6-12

**مثال 6-19:** بين أن المماس للدالة الأسية  $e^{-t/\tau}$  عند  $t = 0$  يتقاطع مع محور  $t$  عند الزمن  $t = \tau$  كما هو مبين شكل 6-12.

تبدأ خط المماس عند النقطة  $A (t = 0, v = 1)$  بميل قدره:  $dv/dt|_{t=0} = -1/\tau$ . وتكون معادلة الخط هى  $v_{\text{tan}}(t) = -t/\tau + 1$  ويقطع الخط محور  $t$  عند النقطة  $B$  حيث  $t = \tau$ . وهذه الملاحظة تعطينا طريقة تقريبية لرسم الدالة الأسية كما هو مبين فى مثال 6-20.

**مثال 6-20:** ارسم شكلاً تقريبياً للدالة  $v(t) = e^{-t/\tau}$  عند  $t > 0$ .

حدد نقطة البداية  $A (t = 0, v = 1)$  للمنحنى ونقطة التقاطع  $B$  للمماس مع محور  $t$  عند  $t = \tau$ . ارسم خط المماس  $AB$  وحدد نقطتين أخريين  $C, D$  عند  $t = \tau$ ,  $t = 2\tau$  بالارتفاعين 0.368،

0.135 = 0.368<sup>2</sup> على التوالى . وبذلك تكون التقطعان على المنحنى . باستخدام النقاط السابقة يمكن رسم المنحنى ويمكن تحديد نقط أخرى لكى بتقريب أكثر دقة انظر شكل 6-12 .

**مثال 21-6:** (أ) بين أن معدل التغير بالنسبة للزمن للدالة الأسية  $v = Ae^{st}$  هو عند أى لحظة يكون متناسباً مع قيمة الدالة عند نفس اللحظة . (ب) بين أن أى مركبة خطية من الدوال الأسية ومشتقاتها النونية  $n$  تكون متناسبة مع الدالة الأصلية وأوجد معامل التناسب .

(أ) معدل التغير فى الدالة يساوى المشتقة الأولى لها وبالنسبة للدالة الأسية يكون :

$$\frac{dv}{dt} = sAe^{st} = sv$$

(ب) باستخدام النتائج فى (أ) نحصل على :

$$\frac{d^2v}{dt^2} = s^2Ae^{st} = s^2v$$

$$a_0v + a_1 \frac{dv}{dt} + \dots + a_n \frac{d^nv}{dt^n} = (a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n)v = Hv \quad (35)$$

حيث

$$H = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n \quad (36)$$

تعريف ورسم الدالة  $f(t) = Ae^{-at} + B$  .

غالباً ما نواجه الدالة :

$$f(t) = Ae^{-at} + B \quad (37)$$

وهذه الدالة تعرف تماماً بالأرقام الثلاثة  $A$  ،  $B$  ،  $a$  كالتالى :

$A$  = القيمة الابتدائية - القيمة النهائية ،  $B$  = القيمة النهائية ،  $a$  = مقلوب ثابت الزمن .  
أو بتعبير آخر .

القيمة الابتدائية  $f(0) = A + B$  ، والقيمة النهائية  $f(\infty) = B$  ، وثابت الزمن  $1/a$  .

مسألة 6-22: أوجد الدالة  $v(t)$  التي تتناقص أسياً من القيمة 5V عند  $t = 0$  إلى 1 V عند  $t = \infty$  بثابت زمن قدره 3 s. ارسم الدالة  $v(t)$  مستخدماً طريقة المثال 6-20.

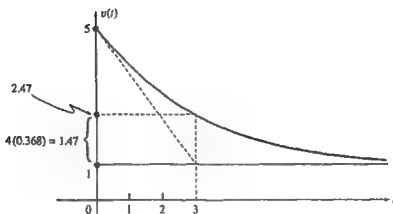
من المعادلة (37) لدينا  $v(t) = Ae^{-t/\tau} + B$  ولأن  $v(0) = A + B = 5$  و  $v(\infty) = B = 1$  ، لذلك  $\tau = 3$  ،  $A = 4$

$$v(t) = 4e^{-t/3} + 1$$

ويمكن تعميم النتيجة السابقة على النحو التالي:

$$v(t) = (\text{القيمة الابتدائية} - \text{القيمة النهائية}) e^{-t/\tau} + (\text{القيمة النهائية})$$

والرسم مبين في شكل 6-13:



شكل 6-13

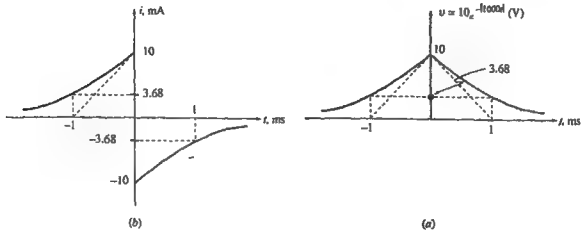
مسألة 6-23: الجهد  $v = V_0 e^{-t/\tau}$  حيث  $\tau > 0$  متصل بمكثف. أوجد التيار  $i$  في المكثف، ارسم تغير  $v$  مع  $i$  للقيم  $V_0 = 10$  V ،  $C = 1 \mu F$  ،  $\tau = 1$  ms .

باستخدام العلاقة  $i = C dv/dt$  .

$$\begin{array}{llll} \text{for } t < 0, & v = V_0 e^{t/\tau} & \text{and} & i = I_0 e^{t/\tau} \\ \text{for } t > 0, & v = V_0 e^{-t/\tau} & \text{and} & i = -I_0 e^{-t/\tau} \end{array}$$

حيث  $I_0 = CV_0/\tau$  .

لقيم  $I_0 = 10 \text{ mA}$  ،  $\tau = 10^{-3} \text{ s}$  ،  $C = 1 \mu\text{F}$  ،  $V_0 = 10 \text{ V}$  ورسم تغير كل من  $i$  ،  $v$  مع الزمن مبين في شكل 6-14(a) ، شكل 6-14(b) على التوالي .



شكل 6-14

## 6.11 الدوال الجيبية المخمدة

الدالة الجيبية ذات القيم العظمى المتناقصة أسياً لها الشكل التالى :

$$v(t) = Ae^{-at} \cos(\omega t + \theta) \quad (38)$$

وستناقش هذه الدالة بالتفصيل فى الفصل 8 .

**مثال 6-24 :** يمر التيار  $i = I_0 e^{-at} \cos \omega t$  فى دائرة توالى  $RL$  . (أ) أوجد الجهد  $v_{RL}$  لهذه المجموعة . (ب) أحسب  $v_{RL}$  إذا كان  $I_0 = 3 \text{ A}$  ،  $a = 2$  ،  $\omega = 40 \text{ rad/s}$  ،  $R = 5 \Omega$  ،  $L = 0.1 \text{ H}$  . ارسم  $i$  كدالة فى الزمن .

(أ) لدينا :

$$v_R = Ri = RI_0 e^{-at} \cos \omega t$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = -LI_0 e^{-at} (a \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$$

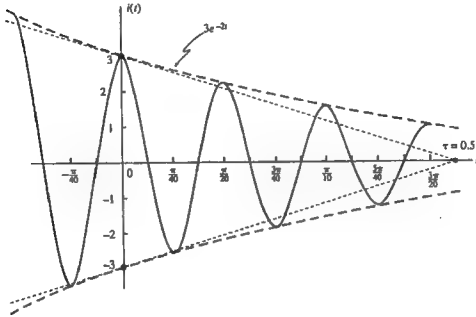
$$v_{RL} = v_R + v_L = I_0 e^{-at} [(R - La) \cos \omega t - L\omega \sin \omega t] = V_0 e^{-at} \cos(\omega t + \theta)$$

$$V_0 = I_0 \sqrt{(R - La)^2 + L^2 \omega^2} \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1} [L\omega / (R - La)] \quad (39)$$

(ب) بالتعويض بالقيم السابقة في المعادلة (39) فإن  $V_0 = 18.75 \text{ V}$  ،  $\theta = 30.8^\circ$  . ويعطى التيار  $i$  والجهد  $V_{RL}$  كالآتي :

$$i = 3e^{-2t} \cos 40t \quad \text{and} \quad v_{RL} = 18.75e^{-2t} \cos (40t + 39.8^\circ)$$

التيار  $i$  مبين في شكل 5-15.



شكل 5-6

## 6.12 الإشارة العشوائية

تعالملنا حتى الآن مع الإشارات المعرفة تعريفاً كاملاً . على سبيل المثال فإن قيمة الموجه الجيبية مثل جهد الخط يمكن الحصول عليه عند جمع الأزمنة إذا كانت القيمة العظمى والتردد وزاوية الموجه معروفة . وهذه الإشارات تعرف بأنها معينة .

وتوجد مجموعة أخرى من الإشارات والتي تعرف جزئياً من خلال فترة زمنية بالقيمة المتوسطة والقيمة الفعالة ومدى التردد . وهذه تسمى بالإشارات العشوائية . ويمكن أن تحمل الإشارات العشوائية معلومات ويجب ألا يحدث التباس بينها وبين التشويش الذي غالباً ما يصاحبها . والجهد الناشئ من الكلام المنطوق على طرفي الميكروفون والإشارات التي يلتقطها هوائي الراديو والتلفزيون

من محطات الإرسال تعتبر أمثلة للإشارات العشوائية . وخواص هذه الإشارات وقيمها يمكن تقديرها فقط بشكل عام كقيمة متوسطة وليس بشكل دقيق . كما توجد أمثلة أخرى للإشارات العشوائية وهي الناتجة من الموجات الثابتة في الحاسبات الرقمية والشكل العام المكون للصورة أو الحديث أو الموسيقى التي تعدل قيم الموجات الحاملة في نظام التعديل القيمي AM .

وربما يبدو من غير المفيد مناقشة الإشارات التي تعرف بشكل عام كقيمة متوسطة ومع هذا فإنه عند تحليل التوافقيات فإننا نحصل على الكثير من تفاصيل التأثير العام لهذه الإشارات في الدوائر الكهربائية .

**مثال 2-6:** أخذت عينات من إشارة عشوائية  $x(t)$  كل  $1\text{ ms}$  رمز لها بالرمز  $x(n)$  . بين تقريباً القيمة المتوسطة والقيمة المتوسطة الفعالة للإشارة  $x(t)$  من العينات المعطاة في جدول 2-6 .

**جدول 2-6**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x(n)$	2	4	11	5	7	6	9	10	3	6	8	4	1	3	5	12

القيم المتوسطة بالنسبة للزمن للإشارة  $x(t)$ ، وقيم المربعات  $x^2(t)$  يمكن أخذها تقريباً من قيم  $x(n)$  .

$$X_{avg} = (2 + 4 + 11 + 5 + 7 + 6 + 9 + 10 + 3 + 6 + 8 + 4 + 1 + 3 + 5 + 12) / 16 = 6$$

$$X_{eff}^2 = (2^2 + 4^2 + 11^2 + 5^2 + 7^2 + 6^2 + 9^2 + 10^2 + 3^2 + 6^2 + 8^2 + 4^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 + 12^2) / 16 = 46$$

$$X_{eff} = 6.78$$

**مثال 2-6:** إشارة ثنائية  $v(t)$  هي إما  $+0.5\text{ V}$  ،  $-0.5\text{ V}$  تغير إشارتها كل فترة زمنية قيمتها  $1\text{ ms}$  . ووقت حدوث التغير ليس معروفاً مسبقاً ولكن عدد مرات التغير الموجب = عدد مرات التغير السالب ، ولذلك فإنه عند قياسها لزم زمن طويل فإن فترة بقائها بالقيمة  $+0.5\text{ V}$  هو نفس بقائها في القيمة  $-0.5\text{ V}$  . أحسب القيمة المتوسطة والفعالة في زمن قدره  $10\text{ s}$  .

خلال فترة الـ  $10\text{ s}$  يوجد 10000 تغير كل منها يكث  $1\text{-ms}$  ولذلك فإن القيمة المتوسطة للإشارة  $v(t)$  يمكن بيانها تقريباً كالتالي :



والقيمة المؤثرة للإشارة  $v(t)$  هي :

$$V_{\text{eff}}^2 = [(0.5)^2 \times 5000 + (-0.5)^2 \times 5000] / 10,000 = (0.5)^2 \quad \text{or} \quad V_{\text{eff}} = 0.5 \text{ V}$$

القيمة  $V_{\text{eff}}$  لا تعتمد على عدد الفترات .

### أمثلة محلولة

6-1 أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للإشارة  $v = 1 + 2 \sin(\omega t + \theta)$  إذا كان  $\omega = 1000 \text{ s}$  ،

$\theta = 3 \text{ rad}$  . حدد ما إذا كانت الدالة  $v$  دورية ثم أوجد تردددها  $f$  وفترة دورتها  $T$  وحدد زاوية الوجه بالدرجات .

$$V_{\text{max}} = 1 + 2 = 3 \quad V_{\text{min}} = 1 - 2 = -1$$

الدالة  $v$  دورية ولإيجاد التردد ودورتها نلاحظ أن  $\omega = 2\pi f = 1000 \text{ rad/s}$  لذلك :

$$f = 1000 / 2\pi = 159.15 \text{ Hz} \quad \text{and} \quad T = 1/f = 2\pi / 1000 = 0.00628 \text{ s} = 6.28 \text{ ms}$$

$$3 \text{ rad} = 180^\circ \times 3/\pi = 171.9^\circ = \text{زاوية الوجه}$$

6-2 فى نظام قياس الموجات المتناهية الصغر فإن إشارة كهرومغناطيسية  $v_1 = A \sin 2\pi ft$  ذو

تردد  $f = 100 \text{ MHz}$  قد أرسلت ثم سجل صндаها  $v_2(t)$  من الهدف . فإذا كان الزمن بين الإشارة وصنداها هو  $\tau$  . (أ) أكتب تعبيراً للإشارة  $v_2(t)$  وأحسب زاوية الوجه لزمن تأخير  $\tau_1 = 515 \text{ ns}$  ،  $\tau_2 = 555 \text{ ns}$  . (ب) هل يمكن حساب المسافة بطريقة واضحة من زاوية الوجه للإشارة  $v_2(t)$ ؟ وإذا لم يتيسر فاذكر المعلومات الإضافية المطلوبة .

(1)

$$\text{Let } v_2(t) = B \sin 2\pi f(t - \tau) = B \sin(2\pi ft - \theta).$$

$$\text{For } f = 100 \text{ MHz} = 10^8 \text{ Hz, } \theta = 2\pi f\tau = 2 \times 10^8 \pi \tau = 2\pi k + \phi \text{ where } 0 < \phi < 2\pi.$$

$$\text{For } \tau_1 = 515 \times 10^{-9}, \theta_1 = 2\pi \times 10^8 \times 515 \times 10^{-9} = 103\pi = 51 \times 2\pi + \phi_1 \text{ or } k_1 = 51 \text{ and } \phi_1 = \pi.$$

$$\text{For } \tau_2 = 555 \times 10^{-9}, \theta_2 = 2\pi \times 10^8 \times 555 \times 10^{-9} = 111\pi = 55 \times 2\pi + \phi_2 \text{ or } k_2 = 55 \text{ and } \phi_2 = \pi.$$

(ب) حيث أن زاويتي الوجه  $\theta_1$  ،  $\theta_2$  متساويتان فإن زمنى التأخير  $\tau_1$  ،  $\tau_2$  يصعب التمييز بينهما اعتماداً على زاوية الوجه  $\theta_1$  ،  $\theta_2$  ولفك هذا الإيهام فإن كلاً من  $k$  ،  $\theta$  مطلوب لهذا الأمر .

6-3 إذا كانت الدورة  $T_1$ ،  $T_2$  للدالتين  $v_1(t)$ ،  $v_2(t)$  لهما مضروب مشترك فإن مجموع

الدالتين  $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$  هي دالة دورية ذات دورة مساوية لأصغر مضروب مشترك لأى

$$\text{من } T_1, T_2 \text{ وبين فى هذه الحالة أن } V_{\text{avg}} = V_{1,\text{avg}} + V_{2,\text{avg}}.$$

إذا اخترنا رقمين صحيحين  $n_1$ ،  $n_2$  بحيث  $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$  فإن  $v_1(t) = v_1(t + n_1 T_1)$

$$v_2(t) = v_2(t + n_2 T_2) \text{ وبالتالي :}$$

$$v(t + T) = v_1(t + T) + v_2(t + T) = v_1(t) + v_2(t) = v(t)$$

وتكون  $v(t)$  دورية بدورة  $T$ .

القيمة المتوسطة هي :

$$V_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \int_0^T [v_1(t) + v_2(t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_2(t) dt = V_{1,\text{avg}} + V_{2,\text{avg}}$$

6-4 بين أن متوسط قيمة الدالة  $\cos^2(\omega t + \theta)$  هي  $1/2$ .

باستخدام المتماثلات  $\cos^2(\omega t + \theta) = 1/2 [1 + \cos 2(\omega t + \theta)]$  والتعبير  $f(t) = F_{\text{avg}}$  وناتج

المسألة رقم 6.3 نحصل على :

$$\langle 1 + \cos 2(\omega t + \theta) \rangle = \langle 1 \rangle + \langle \cos 2(\omega t + \theta) \rangle$$

$$\text{But } \langle \cos 2(\omega t + \theta) \rangle = 0. \text{ Therefore, } \langle \cos^2(\omega t + \theta) \rangle = 1/2.$$

6-5 إذا كان  $v(t) = V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)$  بين أن  $V_{\text{eff}}^2 = V_{\text{dc}}^2 + (1/2)V_{\text{ac}}^2$ .

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T [V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)]^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [V_{\text{dc}}^2 + V_{\text{ac}}^2 \cos^2(\omega t + \theta) + 2V_{\text{dc}}V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)] dt \\ &= V_{\text{dc}}^2 + \frac{1}{2}V_{\text{ac}}^2 \end{aligned}$$

وأيضاً يمكن كتابة :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^2 &= \langle v^2(t) \rangle = \langle [V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)]^2 \rangle \\ &= \langle V_{\text{dc}}^2 + V_{\text{ac}}^2 \cos^2(\omega t + \theta) + 2V_{\text{dc}}V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta) \rangle \\ &= V_{\text{dc}}^2 + V_{\text{ac}}^2 \langle \cos^2(\omega t + \theta) \rangle + 2V_{\text{dc}}V_{\text{ac}} \langle \cos(\omega t + \theta) \rangle \\ &= V_{\text{dc}}^2 + \frac{1}{2}V_{\text{ac}}^2 \end{aligned}$$

6-6 إذا كان الترددان  $f_1$  ،  $f_2$  توافقان مختلفان للتردد  $f_0$  بين أن القيمة الفعالة للدالة :

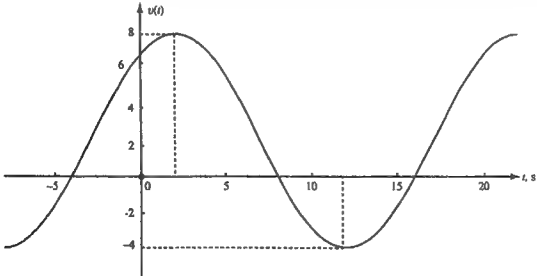
$$\begin{aligned} v^2(t) &= V_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) + V_2^2 \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \\ &\quad + 2V_1V_2 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \\ V_{\text{eff}}^2 &= \langle v^2(t) \rangle = V_1^2 \langle \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) \rangle + V_2^2 \langle \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle \\ &\quad + 2V_1V_2 \langle \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle \end{aligned}$$

ولكن :  $\langle \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) \rangle = \langle \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle = 1/2$  راجع مسألة 4-6 و

$$\begin{aligned} \langle \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle &= \langle \cos[2\pi(f_1 + f_2)t + (\theta_1 + \theta_2)] \rangle \\ &\quad + \langle \cos[2\pi(f_1 - f_2)t + (\theta_1 - \theta_2)] \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2) \text{ and } V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)}. \quad \text{لذلك :}$$

6-7 إذا كانت الإشارة  $v(t)$  في شكل 6-16 جيبيية أوجد دورتها وترددها . ثم عبر عنها بالشكل  $v(t) = A + B \cos(\omega t + \theta)$  وأوجد قيمتها المتوسطة وقيمتها الفعالة .



شكل 6-16

الزمن بين قيمتين عظيمين موجبتين  $T = 20$  s هي دورة واحدة لتردد  $f = 0.05$  Hz . والإشارة هي دالة جيب تمام بقيمة عظمى B مضاف إلى قيمة ثابتة A .

$$B = \frac{1}{2}(V_{\max} - V_{\min}) = \frac{1}{2}(8 + 4) = 6 \quad A = V_{\max} - B = V_{\min} + B = 2$$

ومنحنى جيب التمام مرحل بمقدار ثابته إلى اليمين والذي يؤدي إلى زاوية تأخر قيمتها  $36^\circ = 360^\circ (2/20)$  ولذلك فإننا نعبر عن الإشارة بالتالي :

$$v(t) = 2 + 6 \cos\left(\frac{\pi}{10}t - 36^\circ\right)$$

ويمكن الحصول على القيمة المتوسطة والفعالة من A ، B .

$$V_{avg} = A = 2, \quad V_{eff}^2 = A^2 + B^2/2 = 2^2 + 6^2/2 = 22 \quad \text{or} \quad V_{eff} = \sqrt{22} = 4.69$$

6-8 إذا كان  $v_1 = \cos 200\pi t$  ،  $v_2 = \cos 202\pi t$  . بين أن  $v = v_1 + v_2$  هي دالة دورية وأوجد دورتها  $V_{\max}$  والأزمنة التي تكون فيها  $v$  ذات قيم عظمى .

دورات كل من  $v_1$  ،  $v_2$  هما  $T_1 = 1/100$  s ،  $T_2 = 1/101$  s على التوالي دورة  $v = v_1 + v_2$  هي أصغر مضروب مشترك لكل من  $T_1$  ،  $T_2$  والتي هي  $T = 100T_1 = 101T_2 = 1$  s . والقيمة العظمى للجهد  $v$  تحدث عند  $t = k$  عندما تكون  $k$  مقدار صحيح حينما تكون  $v_1$  ،  $v_2$  عند قيمتها العظمى وتكون  $V_{\max} = 2$  .

6-9 حول المعادلة  $v(t) = 3 \cos 100t + 4 \sin 100t$  لتكون  $v(t) = A \sin (100t + \theta)$  .

Note that  $3/\sqrt{3^2 + 4^2} = 3/5 = \sin 36.87^\circ$  and  $4/\sqrt{3^2 + 4^2} = 4/5 = \cos 36.87^\circ$ . Then,

$$\begin{aligned} v(t) &= 3 \cos 100t + 4 \sin 100t = 5(0.6 \cos 100t + 0.8 \sin 100t) \\ &= 5(\sin 36.87^\circ \cos 100t + \cos 36.87^\circ \sin 100t) = 5 \sin (100t + 36.87^\circ) \end{aligned}$$

6-10 أوجد القيمة المتوسطة والفعالة للدالة  $v_2(t)$  المبينة في شكل (b) 6-1 إذا كانت  $V_1 = 2$  ،  $V_2 = 1$  ،  $T = 4T_1$

$$V_{2,avg} = \frac{V_1 T_1 - V_2 (T - T_1)}{T} = \frac{V_1 - 3V_2}{4} = -0.25$$

$$V_{2,eff}^2 = \frac{V_1^2 T_1 + V_2^2 (T - T_1)}{T} = \frac{7}{4} \quad \text{or} \quad V_{2,eff} = \sqrt{7}/2 = 1.32$$

6-11 أوجد  $V_{3,avg}$  ،  $V_{3,eff}$  فى شكل 6-1(c) حينما  $T = 100 T_1$  .

من شكل 6-1(c) :  $V_{3,avg} = 0$  ولإيجاد  $V_{3,eff}$  لاحظ أن تكامل  $v_3^2$  للدورة واحدة هى  $V_0^2 T_1 / 2$  والقيمة المتوسطة لـ  $v_3^2$  للفترة  $T = 100 T_1$  تكون :

$$\langle v_3^2(t) \rangle = V_{3,eff}^2 = V_0^2 T_1 / 200 T_1 = V_0^2 / 200 \quad \text{or} \quad V_{3,eff} = V_0 \sqrt{2/20} = 0.0707 V_0$$

وبذلك تقل القيمة الفعالة بالمعامل  $\sqrt{T/T_1} = 10$  .

6-12 بالرجوع لشكل 6-1(d) وإذا كان  $T = 6$  وكانت المساحة فى الجزء الموجب والجزء السالب من

الدالة  $v_4(t)$  هى +5 ، -3 على التوالى . أوجد القيمة المتوسطة والفعالة للدالة  $v_4(t)$  .

$$V_{4,avg} = (5 - 3)/6 = 1/3$$

لا يمكن الحصول على القيمة الفعالة من المعلومات المعطاة .

6-13 أوجد القيمة المتوسطة والفعالة لنصف موجة جيب التمام الموحدة  $v_1(t)$  المبينة شكل 6-17(a) .

$$V_{1,avg} = \frac{V_m}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{V_m T}{2\pi T} \left[ \sin \frac{2\pi t}{T} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_m}{\pi}$$

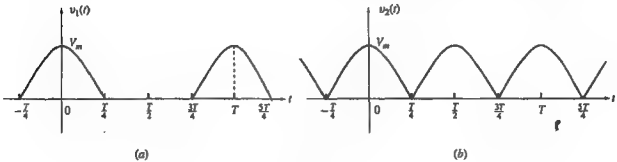
$$V_{1,eff}^2 = \frac{V_m^2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{V_m^2}{2T} \int_{-T/4}^{T/4} \left( 1 + \cos \frac{4\pi t}{T} \right) dt$$

$$= \frac{V_m^2}{2T} \left[ t + \frac{T}{4\pi} \sin \frac{4\pi t}{T} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_m^2}{2T} \left( \frac{T}{4} + \frac{T}{4} \right) = \frac{V_m^2}{4}$$

والتي منها  $V_{1,eff} = V_m/2$  .

6-14 أوجد القيمة المتوسطة والفعالة فى موجبة جيب التمام ذات التوحيد الكامل

6-17(b)  $v_2(t) = V_m |\cos 2\pi t/T|$  .



شكل 6-17

استخدم نتائج المسألة 6-5 ، 6-13 لإيجاد  $V_{2,avg}$  ولذلك :

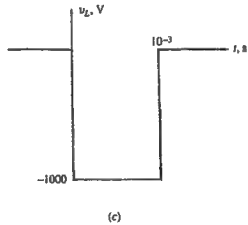
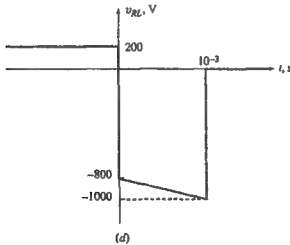
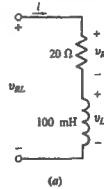
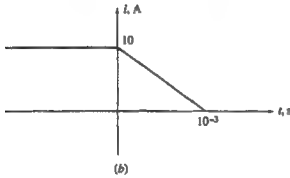
$$v_2(t) = v_1(t) + v_1(t - T/2) \quad \text{and} \quad V_{2,avg} = V_{1,avg} + V_{1,avg} = 2V_{1,avg} = 2V_m/\pi$$

استخدم نتائج المسألة 6-5 ، 6-13 لإيجاد  $V_{2,eff}$  وبذلك :

$$V_{2,eff}^2 = V_{1,eff}^2 + V_{1,eff}^2 = 2V_{1,eff}^2 = V_m^2/2 \quad \text{or} \quad V_{2,eff} = V_m/\sqrt{2}$$

القيمة الفعالة للدالة  $v_2(t)$  يمكن أيضاً استنتاجها مباشرة . وبسبب عمليات التربيع فإن دالة جيب التمام الموحدة كاملاً لها نفس القيم الفعالة كما لدالة جيب التمام نفسها والتي هي  $V_m/\sqrt{2}$  .

6-15 عنصر حثي قيمته 100-mH على التوالي مع مقاومة 20- $\Omega$  [شكل 6-18(a)] يحمل التيار  $i$  كما هو مبين شكل 6-18(b) . أوجد وارسم الجهود على طرفي  $RL$  ،  $L$  ،  $R$  .



شكل 6-18

$$i = \begin{cases} 10 \\ 10(1 - 10^3 t) \\ 0 \end{cases} \text{ (A)} \quad \text{and} \quad \frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 \\ -10^4 \text{ A/s} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{for } t < 0 \\ \text{for } 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ \text{for } t > 10^{-3} \text{ s} \end{matrix}$$

$$v_R = Ri = \begin{cases} 200 \text{ V} \\ 200(1 - 10^3 t) \text{ (V)} \\ 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad v_L = L \frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 \\ -1000 \text{ V} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{for } t < 0 \\ \text{for } 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ \text{for } t > 10^{-3} \text{ s} \end{matrix}$$

وحيث أن العناصر الغير فعالة على التوالي فإن  $v_{RL} = v_R + v_L$  وبذلك :

$$v_{RL} = \begin{cases} 200 \text{ V} & \text{for } t < 0 \\ -2(10^3 t) - 800 \text{ (V)} & \text{for } 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ 0 & \text{for } t > 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

ورسم العلاقات لكل من  $v_L$ ،  $v_{RL}$  مبينة في شكلى (c) 6-18، (d) على التوالي ورسم علاقة الجهد  $v_R$  لها نفس الشكل مثل علاقة التيار [انظر شكل 6.18(b)] مع اختلاف مقياس الرسم الذى هو مضروب فى +20 .

6-16 إشارة رادار  $s(t)$  قيمتها العظمى  $V_m = 100\text{V}$  تتكون من دفعات منتظمة متكررة كل دفعة تستمر  $T_b = 50 \mu\text{s}$  وتكرر الدفعات كل  $T_2 = 10 \text{ ms}$ . أوجد  $S_{\text{eff}}$  والقدرة المتوسطة فى  $s(t)$ .

إذا كان  $V_{\text{eff}} = V_m / \sqrt{2}$  هى القيمة الفعالة للدفعة الجيبية فإن الطاقة التى تحتوى عليها دفعة واحدة هى  $W_b = T_b V_{\text{eff}}^2$  والطاقة التى تحتويها فترة واحدة من  $s(t)$  هى  $W_s = T_s S_{\text{eff}}^2$  حيث  $W = W_b = W_s$  وبذلك نحصل على :

$$T_b V_{\text{eff}}^2 = T_s S_{\text{eff}}^2 \quad S_{\text{eff}}^2 = (T_b / T_s) W_b^2 \quad S_{\text{eff}} = \sqrt{T_b / T_s} V_{\text{eff}} \quad (40)$$

وبالتعويض فى قيم  $T_b$ ،  $T_s$ ،  $V_{\text{eff}}$  فى المعادلة (40) نحصل على :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{(50 \times 10^{-6}) / (10 \times 10^{-3})} (100 / \sqrt{2}) = 5 \text{ V}$$

وبذلك  $W = 10^{-2} (25) = 0.25 \text{ J}$  والقيمة المتوسطة للقدرة فى  $s(t)$  هى :

$$P = W / T_s = T_s S_{\text{eff}}^2 / T_s = S_{\text{eff}}^2 = 25 \text{ W}$$

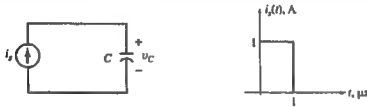
القدرة المتوسطة للدالة  $s(t)$  هى  $S_{\text{eff}}^2$  وقيمتها العظمى هى بقيمة  $V_{\text{eff}}^2$  والنسبة بين القيمة العظمى للقدرة إلى القيمة المتوسطة للقدرة هى  $\sqrt{T_s / T_b}$ ، وفى هذا المثال فإن القيمة المتوسطة للقدرة والقيمة العظمى هما 25 W، 5000 W على التوالي .

6-17 أحد الجهود المستعملة هو  $V_{eff} = 120 \text{ V}$  عند التردد  $60 \text{ Hz}$  ويسحب تياراً  $I_{eff} = 10 \text{ A}$  عند زاوية وجه  $60^\circ$  متأخر - عبر عن كل من  $i$  و  $v$  و  $p = vi$  كدالة للزمن وبين أن دالة القدرة دورية بالإضافة إلى قيمة ثابتة كقيمة تيار . أوجد التردد والقيمة المتوسطة والعظمى والصغرى للمقدار  $p$  .

$$v = 120\sqrt{2} \cos \omega t \quad i = 10\sqrt{2} \cos (\omega t - 60^\circ)$$

دالة القدرة دورية والتردد  $f = 2 \times 60 = 120$  والقدرة المتوسطة  $P_{avg} = 600 \text{ W}$  والقدرة العظمى  $P_{max} = 600 + 1200 = 1800 \text{ W}$  والقدرة الصغرى  $P_{min} = 600 - 1200 = -600 \text{ W}$  .

6-18 نبضة ضيقة في ذات قيمة عظمى  $1\text{-A}$  وفترة استمرار  $1\text{-}\mu\text{s}$  سلطت على مكثف  $1\text{-}\mu\text{F}$  عند الزمن  $t = 0$  كما هو مبين شكل 6-19 فإذا كان المكثف ابتداءً غير مشحون فأوجد الجهد على طرفيه .



شكل 6-19

الجهد على طرفي المكثف هو :

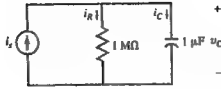
$$V_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 10^6 t \text{ (V)} & \text{for } 0 < t < 1 \mu\text{s (charging period)} \\ 1 \text{ V} & \text{for } t > 1 \mu\text{s} \end{cases}$$

وإذا كان المكثف مشحون بنفس الكمية عند الزمن صفر فإننا نحصل على :

$$v = u(t) \text{ (V) and } i(t) = 10^{-6} \delta(t) \text{ (A).}$$

6-19 النبضة الضيقة المذكورة في المسألة 6-18 سلطت على دائرة توازي مكونة من مكثف  $1\text{-}\mu\text{F}$  ومقاومة  $1\text{-M}\Omega$  كما في شكل 6-20 . وإذا اعتبرنا أن النبضة تنتهي عند  $t = 0$  وأن المكثف ابتداءً غير مشحون . فأوجد الجهد على طرفي مجموعة التوازي  $RC$  .





شكل 6-20

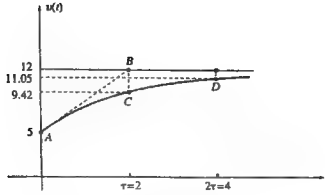
إذا رمزنا بالقيمة  $v$  للجهد على طرفي مجموعة التوازي RC فإن التيار في  $R$  هو  $i_R = v/R = 10^{-6}v$ . وأثناء النبضة يبقى  $i_R$  مهملاً لأن  $v$  لا تتعدى 1 V والتيار  $i_R$  يبقى أقل من  $1 \mu A$ . وبذلك يكون من المنطقي اعتبار أن  $i_C = 1A$  أثناء النبضة وبالتالي  $v(0)^+ = 1V$ . وعند التيار  $t > 0$  فإنه بتطبيق KVL حول حلقة المغلقة فإن :

$$v + \frac{dv}{dt} = 0, \quad v(0^+) = 1V \quad (41)$$

والحل الوحيد للمعادلة (41) هو  $v = e^{-t}$  لقيم  $t > 0$  أو  $v = e^{-t} u(t)$  لجميع قيم  $t$ . وفي الاستخدامات العملية يمكن اعتبار  $i$  دفعة حجمها  $10^{-6}A$  وبالتالي فإن  $i = e^{-t} u(t)$  تسمى الاستجابة لمركبة RC لدفعة التيار.

6-20 ارسم الدالة  $v(t)$  التي تتغير أسياً من 5 V عند  $t = 0$  إلى 12 V عند  $t = \infty$  بثابت زمن قدره 2 s. أكتب معادلة  $v(t)$ .

حدد نقطة البداية ( $t = 0, v = 5$ )، وخط الجهد  $v = 12$  كما في شكل 6-21. المماس عند النقطة A يتقاطع مع خط الجهد المشار إليه عند  $t = 2$  وهي النقطة B على الخط. ارسم خط المماس AB. حدد النقطة C على المنحنى عند  $t = 2$ . للحصول على تمثيل أدق للمنحنى حدد النقطة D عند  $t = 4$ . ارسم المنحنى كما هو مبين. المعادلة هي:  $v(t) = Ae^{-t/2} + B$ . من حالتى الابتداء والنهاية نحصل على  $v(0) = A + B = 5$  أو  $v(\infty) = B = 12$  أو  $A = -7$   $v(t) = -7e^{-t/2} + 12$ .

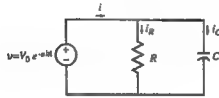


شكل 6-21

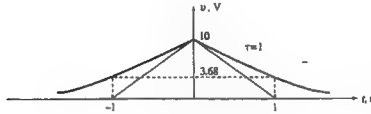
6-21 وصل الجهد  $v = V_0 e^{-at}$  لقيم  $a > 0$  بمجموعة توازي مكونة من مقاومة ومكثف كما هو مبين

شكل (a) 6-22. أوجد التيارات  $i_C$ ،  $i_R$ ،  $i$ . (ب) أحسب وارسم المنحنى  $v$ ،  $i_C$ ،

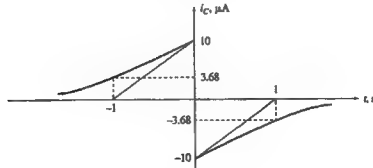
$i$  لقيم  $a = 1$ ،  $R = 1 \text{ M}\Omega$ ،  $C = 1 \mu\text{F}$ ،  $V_0 = 10 \text{ V}$



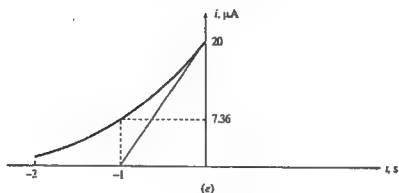
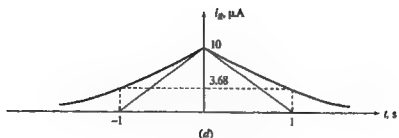
(a)



(b)



(c)



شكل 6-22

(أ) انظر الجزء (a) فى جدول 6-3 للحصول على قيم التيارات المطلوبة .

### جدول 6-3

	Time	$v$	$i_C = C dv/dt$	$i_R = v/R$	$i = i_C + i_R$
(a)	$t < 0$	$v = V_0 e^{at}$	$i_C = CV_0 e^{at}$	$i_R = (V_0/R) e^{at}$	$i = v_0 (Ca + 1/R) e^{at}$
	$t > 0$	$v = V_0 e^{-at}$	$i_C = CV_0 e^{-at}$	$i_R = (V_0/R) e^{-at}$	$i = V_0 (Ca + 1/R) e^{-at}$
(b)	$t < 0$	$v = V_0 e^t$	$i_C = 10^{-5} e^t$	$i_R = 10^{-5} e^t$	$i = 2 (10^{-5} e^t)$
	$t > 0$	$v = V_0 e^{-t}$	$i_C = 10^{-5} e^{-t}$	$i_R = 10^{-5} e^{-t}$	$i = 0$

(ب) انظر (b) فى جدول 6-3 . الأشكال من 6-22 إلى 6-22(e) تبين كل من  $v$ ،  $i_C$ ،  $i_R$ ،  $i$  على التوالي طبقاً للمعلومات المعطاة . أثناء  $t > 0$  فإن  $i = 0$  ولا يغذى جهد المنبع مركبة  $RC$  بأى تيار ويقوم المكثف بأمداد المقاومة بالتيار اللازم لاستمرارية الجهد الأسى على طرفيها .

## مسائل إضافية

6-22 إذا كان  $v_1 = 8 \sin 100 \pi t$  ،  $v_2 = 6 \sin 99 \pi t$  . بين أن  $v = v_1$  هي دالة دورية . أوجد زمن

الدورة وكلاً من القيمة المتوسطة والعظمى والفعالة للدالة  $v$  . الجواب :  $T = 2$  ،  $V_{\max} = 14$  ،

$$V_{\text{eff}} = 5\sqrt{2} , V_{\text{avg}} = 0$$

6-23 للدالة  $v(t) = 2 + 6 \cos(10\pi t + \pi/6)$  . أوجد كلاً من زمن الدورة ، التردد ، زاوية الوجه

بالدرجات ، القيمة العظمى والصغرى والمتوسطة والفعالة لهذه الدالة . الجواب :  $T = 0.2 \text{ s}$  ،

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{22} , V_{\text{avg}} = 2 , V_{\min} = -4 , V_{\max} = 8 , 30^\circ , f = 5 \text{ Hz}$$

6-24 أوجد ثوابت المعادلة  $v(t) = 2 \cos(\omega t + 30^\circ) + 3 \cos \omega t$  لتكون  $v(t) = A \sin(\omega t + \theta)$  .

$$\text{الجواب : } A = 4.84 , \theta = 102^\circ$$

6-25 للشكل المرسوم 6-1(b) . أوجد  $V_{2,\text{eff}}$  ،  $V_{2,\text{avg}}$  ،  $V_1 = V_2 = 3$  ،  $T = 4 T_1/3$  . الجواب :

$$V_{2,\text{eff}} = 3 , V_{2,\text{avg}} = 1.5$$

6-26 أعد حل المسألة 6-25 لقيم  $V_1 = 0$  ،  $V_2 = 4$  ،  $T = 2 T_1$  . الجواب :  $V_{2,\text{eff}} = 2\sqrt{2}$  ،  $V_{2,\text{avg}} = -2$  .

6-27 في شكل 6-1(c) أوجد  $V_{3,\text{eff}}$  ،  $V_{3,\text{avg}}$  لقيم  $V_0 = 2$  ،  $T = 200 T_1$  . الجواب :  $V_{3,\text{avg}} = 0$  ،

$$V_{3,\text{eff}} = 0.1$$

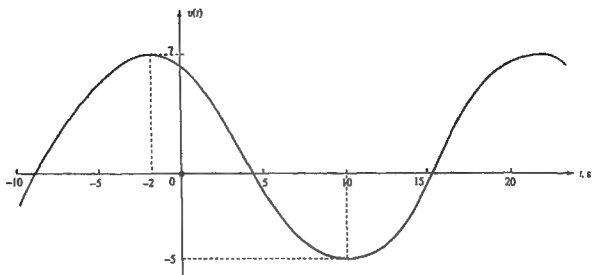
6-28 شكل 6-23 يوضح به موجه جيبي . عبر عنها بالصورة  $v = A + B \sin(\omega t + \theta)$  ثم أوجد

قيمتها المتوسطة والفعالة . الجواب :  $V_{\text{eff}} = V_{\text{avg}} = 1$  ،  $v(t) = 1 + 6 \sin(\pi t/12 + 120^\circ)$  .

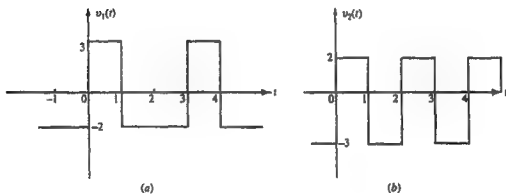
$$\sqrt{19}$$

6-29 أوجد القيمة المتوسطة والفعالة للدالة  $v(t)$  في شكل 6-24(a) والدالة  $v_2(t)$  في شكل 6-24(b) .

$$\text{الجواب : } V_{2,\text{eff}} = \sqrt{(13/2)} , V_{2,\text{avg}} = (1/2) , V_{1,\text{eff}} = \sqrt{(17/3)} , V_{1,\text{avg}} = (1/3)$$



شكل 6-23



شكل 6-24

6-30 إذا كان التيار في دائرة التسوالي  $RL$  والتي بها  $R = 5\Omega$ ،  $L = 10\text{ H}$  في شكل 6-10(a) حيث  $T = 1\text{ s}$  أوجد الجهد على طرفي  $RL$ .

الجواب :

$$v = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 10 + 5t & \text{for } 0 < t < 1 \\ 5 & \text{for } t > 1 \end{cases}$$

6-31 أوجد تيار المكثف في المسألة 6-19 لشكل 6-20 لجميع قيم  $t$ .

$$\text{الجواب : } i_C = 10^{-6} [\delta(t) - e^{-t} v(t)]$$

6-32 الجهد على طرفي عنصر حتى I-H مكون من دورة جيبية واحدة كما هو مبين شكل 6-25(a).

(أ) أكتب معادلة  $v(t)$ . (ب) أوجد وارسم التيار على العنصر الحثي. (ج) أوجد قيمة وزمن

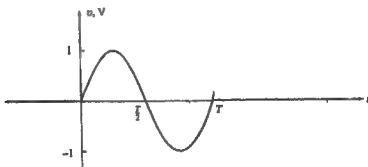
حدوث الطاقة العظمى في العنصر.

الجواب:

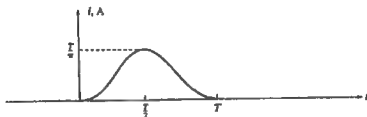
$$(a) \quad v = [u(t) - u(t - T)] \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (V)$$

$$(b) \quad i = (T/2\pi)[u(t) - u(t - T)] \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T}\right) \quad (A). \quad \text{See Fig. 6-25(b).}$$

$$(c) \quad W_{\max} = \frac{1}{2\pi^2} T^2 \quad (J) \quad \text{at } t = T/2$$



(a)



(b)

شكل 6-25

6-33 أكتب معادلة الدالة  $v(t)$  التي تتناقص أسياً من 7 عند  $t = 0$  إلى 3 عند  $t = \infty$  بثابت زمن قدره

200 ms. الجواب:  $v(t) = 3 + 4e^{-st}$  لقيم  $t > 0$ .

6-34 أكتب علاقة الدالة  $v(t)$  التي تزداد أسياً بثابت زمني 0.8 s صفر عند  $t = -\infty$  إلى 9 عند  $t = 0$

الجواب:  $v(t) = 9e^{5t/4}$  لقيم  $t < 0$ .

6-35 أكتب التيار في شكل 6-6 بدلالة دالة الوحدة.

$$i(t) = 4u(t) + 6 \sum_{k=1}^{\infty} [u(t - 5k) - u(t - 5k + 2)] \quad \text{الجواب:}$$

6-36 في شكل (a) 6-10 إذا كان  $T = 1$  وباستدعاء الشكل الموجي  $s_1(t)$  عبر عن  $s_1(t)$  والمشتقة الأولى والثانية لها  $ds_1/dt$  ،  $d^2s_1/dt^2$  باستخدام دالتى النبضة والدفعة .

$$s_1(t) = [u(t) - u(t-1)]t + u(t-1), \quad ds_1/dt = u(t) - u(t-1), \quad d^2s_1/dt^2 = \delta(t) - \delta(t-1) \quad \text{الجواب :}$$

6-37 أوجد الجهد الدفعى الذى يتسبب فى تيار فجائى قيمته  $A$  عند  $t = 0$  حينما يسقط على عنصر حتى  $10 \text{ mH}$  . الجواب :  $v(t) = 10^{-2} d(t) \text{ V}$  .

6-38 إذا كان  $v_1 = \cos(t + 30^\circ)$  ،  $v_2 = \cos(t + 30^\circ)$  ،  $v = v_1 + v_2$  أكتب  $v$  على صورة دالة جيب تمام واحدة  $v = A \cos(t + \theta)$  . (ب) أوجد القيم الفعالة لكل من  $v_1$  ،  $v_2$  ،  $v$  . ناقش لماذا  $V_{\text{eff}}^2 > (V_{1,\text{eff}}^2 + V_{2,\text{eff}}^2)$  .

الجواب : (أ)  $v = 1.93 \cos(t + 15^\circ)$  . (ب)  $V_{1,\text{eff}} = V_{2,\text{eff}} = 0.707$  ،  $V_{\text{eff}} = 1.366$  . وقد استنتجت  $V_{\text{eff}}$  من العلاقة التالية :

$$V_{\text{eff}}^2 = \langle v^2 \rangle = \langle (v_1 + v_2)^2 \rangle = \langle v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle + 2\langle v_1v_2 \rangle$$

حيث أن  $v_1$  ،  $v_2$  لها نفس التردد وزاوية الوجه بينهما  $30^\circ$  فإننا نحصل على

$$(V_1 V_2) = (1/2) \cos 30^\circ = \sqrt{3}/4$$

التي تكون موجبة وبذلك  $V_{\text{eff}}^2 > (V_{1,\text{eff}}^2 + V_{2,\text{eff}}^2)$  .

6-39 (أ) بين أن المعادلة  $v_1 = \cos t + \cos \sqrt{2}t$  ليست دورية . (ب) استبدل قيمة  $\sqrt{2}$  بالقيمة 1.4 ثم بين أن  $t = 1.4$   $v_2 = \cos t + \cos 1.4t$  دورية وأوجد دورتها  $T_2$  . (ج) استبدل  $\sqrt{2}$  بالقيمة 1.41 ثم أوجد الدورة  $T_3$  للدالة  $v_3 = \cos t + \cos 1.41t$  . (د) استبدل  $\sqrt{2}$  بالقيمة 1.4142 . وأوجد الدورة  $T_4$  للدالة  $v_4 = \cos t + \cos 1.4142t$  . الجواب : (أ)  $\sqrt{2}$  ليس رقماً جذرياً لذلك فإن  $v_1$  ليست دورية . (ب)  $T_2 = 10\pi \text{ s}$  . (ج)  $T_3 = 200\pi \text{ s}$  . (د)  $T_4 = 10000\pi \text{ s}$  .

6-40 إشارة عشوائية  $s(t)$  قيمتها الفعالة 5V لها قيمة تيار مستمر 2V . أوجد القيمة الفعالة للدالة  $s_0(t) = s(t) - 2$  . عندما تخذف مركبة التيار المستمر .

$$s_{0,\text{eff}} = \sqrt{5^2 - 4} = \sqrt{21} = 4.58 \text{ V} \quad \text{الجواب :}$$





## الفصل السابع

### دوائر الرتبة الأولى

#### 7.1 مقدمة

كلما تغيرت الدائرة من حالة إلى أخرى إما بتغيير في المنبع أو تغيير في عناصر الدائرة ينتج عن ذلك فترة انتقالية يتغير فيها تيارات أفرع الدائرة وجهد عناصرها المختلفة من القيم السابقة إلى قيم جديدة. هذه الفترة تسمى بالفترة العابرة. وبعد انقضاء الفترة العابرة فإن الدائرة تعتبر في حالة استقرار. وهنا نجد أن المعادلة التفاضلية الخطية التي تبين حالة الدائرة سيحتوي حلها على جزءان: الدالة المكتملة (أو الحل المتجانس) والحل الخاص. فالدالة المكتملة تعني بالحالة العابرة والحل الخاص يختص بالحالة المستقرة.

في هذا الفصل سنوجد استجابة دوائر الرتبة الأولى ذات القيم الابتدائية المختلفة والمنابع المختلفة. ومن ثم سنبحث عن حل تخميني يقودنا لنفس الاستجابة بدون الدخول في الحل القياسي للمعادلات التفاضلية وسنقوم أيضاً بحل المعادلات المتعلقة بالاستجابات الطبيعية والجبرية والسلمية والدفعية بالإضافة إلى حالات التيار المستمر المستقرة وحالات الفصل والتوصيل للعناصر الحثية والمكثفات.

#### 7-2 تفريغ المكثف في المقاومة

إذا اعتبرنا مكثفاً فرق جهد لوحية  $V_0$ . فإنه حينما يوجد مسار توصيل  $R$  على طرفيه فإن الشحنة المخزنة ستتقل من خلال المكثف من أحد اللوحين إلى الآخر مسببة تياراً  $i$ . وبذلك يتناقص جهد

المكثف  $\nu$  تدريجياً إلى الصفر وفي نفس الوقت يصبح التيار صغراً. وفي الدائرة RC المبينة شكل 7-7(a) فإن  $\nu = Ri = c \, d\nu/dt$  ويحذف  $i$  في كلا المعادلتين فإن :

$$\frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{RC} \nu = 0 \quad (1)$$

والمعادلة الوحيدة ذات المركبة الخطية مع مشتقاتها الأولى والمساوية للصفر هي دالة أسية تأخذ الشكل  $Ae^{st}$ . وباستبدال  $\nu$  بالقيمة  $Ae^{st}$ ،  $d\nu/dt$  بالقيمة  $sAe^{st}$  في المعادلة رقم (1) نحصل على :

$$sAe^{st} + \frac{1}{RC} Ae^{st} = A \left( s + \frac{1}{RC} \right) e^{st} = 0$$

ومنها

$$s + \frac{1}{RC} = 0 \quad \text{or} \quad s = -\frac{1}{RC} \quad (2)$$

وإذا كان  $\nu(0) = A = V_0$ ، فإنه يمكن إيجاد  $\nu(t)$ ،  $i(t)$  كما يلي :

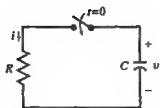
$$\nu(t) = V_0 e^{-t/RC}, \quad t > 0 \quad (3)$$

$$i(t) = -C \frac{d\nu}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}, \quad t > 0 \quad (4)$$

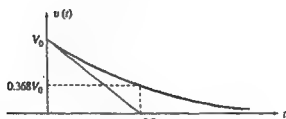
ويكون الجهد والتيار للمكثف قيم أسية بقيم ابتدائية  $V_0$ ،  $V_0/R$  على التوالي وحينما يزداد الزمن فإن الجهد والتيار يصلان إلى الصفر بثابت زمني  $\tau = RC$ . انظر شكل 7-1(b)، (c).

**مثال 7-1 :** إذا كان الجهد على طرفي مكثف  $1\text{-}\mu\text{F}$  هو  $10\text{ V}$  عند  $t < 0$ ، عند  $t = 0$  وصلت مقاومة  $1\text{-M}\Omega$  على طرفي المكثف أوجد ثابت الزمن  $\tau$  والجهد  $\nu(t)$  وقيمته عند الزمن  $t = 5\text{ s}$ .

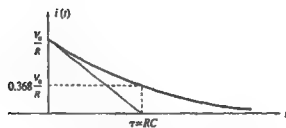
$$\tau = RC = 10^6(10^{-6})\text{ s} = 1\text{ s} \quad \nu(t) = 10e^{-t} (\text{V}), \quad t > 0 \quad \nu(5) = 10e^{-5} = 0.067\text{ V}$$



(a)



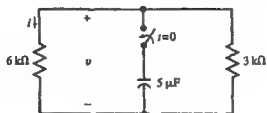
(b)



(c)

شكل 7-1

مثال 7-2 : مكثف  $5\text{-}\mu\text{F}$  له قيمة جهد ابتدائية  $4\text{ V}$  متصل بمجموعة توازي مكونة من مقاومتين  $6\text{-k}\Omega$  ،  $3\text{-k}\Omega$  شكل 7-2. أوجد التيار  $i$  في المقاومة  $6\text{-k}\Omega$ .



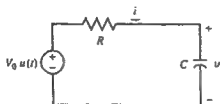
شكل 7-2

المقاومة المكافئة لمقاومتى التوازي هي  $R = 2k\Omega$ . ثابت الزمن للدائرة  $RC = 10^{-2} s$  الجهد والتيار في المقاومة  $6k\Omega$  هما على التوالي.

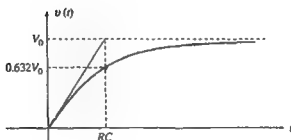
$$v = 4e^{-100t} \text{ (V)} \quad \text{and} \quad i = v/6000 = 0.67e^{-100t} \text{ (mA)}$$

### 7-3 تكوين جهد التيار المستمر على طرفي المكثف

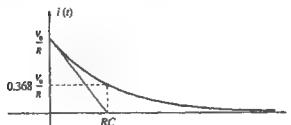
صل مكثف غير مشحون ابتداءً لبطارية ذات الجهد  $V_0$  من خلال مقاومة عند الزمن  $t = 0$ . كالدارة المبينة بشكل 7-3(a).



(a)



(b)



(c)

شكل 7-3

لقيم  $t > 0$  استخدم KVL حول الحلقة لتعطي  $Ri + v = V_0$  ومنها بعد التعويض بالقيمة  $i = C (dv/dt)$  تصبح:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = \frac{1}{RC} V_0 \quad t > 0 \quad (5a)$$

وباستخدام الحالة الابتدائية :

$$v(0^+) = v(0^-) = 0 \quad (5b)$$

ويجب أن يحقق الحل كلاً من (5a)، (5b). وبالحل الخاص (أو الاستجابة الجبرية) فإنه  $v_p(t) = V_0$  تحقق المعادلة (5a) ولكن لا تحقق المعادلة (5b). أما الحل المتجانس (أو الاستجابة الطبيعية)  $v_A(t) = Ae^{-t/RC}$  يمكن إضافته وقيمه العظمى  $A$  يمكن ضبطها بحيث يكون الحل الكامل للمعادلة (6a) يحقق كلاً من (5a)، (5b).

$$v(t) = v_p(t) + v_A(t) = V_0 + Ae^{-t/RC} \quad (6a)$$

من الحالة الابتدائية  $v(0)^+ = V_0 + A = 0$  أو  $A = -V_0$  ولذلك يكون الحل الكامل

$$v(t) = V_0(1 - e^{-t/RC})u(t) \quad [\text{انظر شكل 7-3(b)}] \quad (6b) \quad [\text{see Fig. 7-3(b)}]$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} u(t) \quad [\text{انظر شكل 7-3(c)}] \quad (6c) \quad [\text{see Fig. 7-3(c)}]$$

**مثال 7-3 :** مكثف  $4\text{-}\mu\text{F}$  له قيمة جهد ابتدائية  $v(0^-) = 2\text{ V}$  متصلاً ببطارية  $12\text{ V}$  من خلال مقاومة  $R = 5\text{ k}\Omega$  عند  $t = 0$ . أوجد الجهد على طرفي المكثف والتيار المار به عند  $t > 0$ .

ثابت الزمن للدائرة هو  $\tau = RC = 0.025$  وبتتبع التحليل في مثال 7-2 نحصل على :

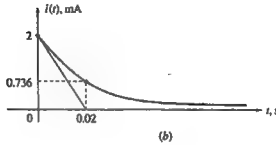
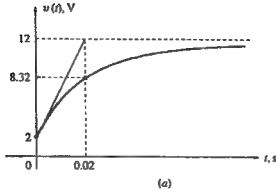
$$v(t) = 12 + Ae^{-50t}$$

من الحالات الابتدائية  $v(0^-) = v(0^+) = 12 + A = 2$  أو  $A = -10$  ولذلك فإنه عند  $t > 0$ .

$$v(t) = 12 - 10e^{-50t} \text{ (V)}$$

$$i(t) = (12 - v)/5000 = 2 \times 10^{-3} e^{-50t} \text{ A} = 2e^{-50t} \text{ (mA)}$$

ويمكن أيضاً حساب التيار من العلاقة  $i = C(dv/dt)$ . ويزداد الجهد نسبياً من القيمة الابتدائية  $2\text{ V}$  إلى القيمة النهائية  $12\text{ V}$ . بثابت الزمن  $20\text{ ms}$  كما هو مبين شكل 7-4(a) بينما يتناقص التيار من القيمة  $2\text{ mA}$  إلى الصفر كما هو مبين شكل 7-4(b).



شكل 7-4

#### 7-4 دائرة RL خالية المبع

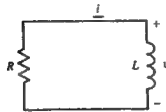
في دائرة RL المبينة شكل 7-5 افترض أنه عند  $t = 0$  كان التيار  $I_0$ . وعند  $t > 0$  يجب أن يحقق العلاقة  $Ri + L (di/dt) = 0$ . ومنها يكون الحل  $i = Ae^{st}$ . وبالتعويض نوجد قيمة كل من  $A$ ،  $S$ .

$$A(R + Ls)e^{st} = 0, \quad R + Ls = 0, \quad s = -R/L$$

الحالة الابتدائية  $i(0) = A = I_0$  ومن ثم:

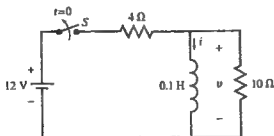
$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \quad \text{for } t > 0$$

ثابت الزمن للدائرة هو  $L/R$ .

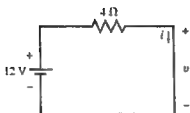


شكل 7-5

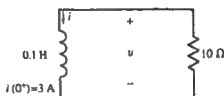
مثال 7-4 : فصلت البطارية 12-V المبينة شكل 7-6(a) عند الزمن  $t = 0$ . أوجد تيار العنصر الحثي والجهه  $v$  لجميع الأزمنة.



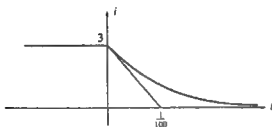
(a)



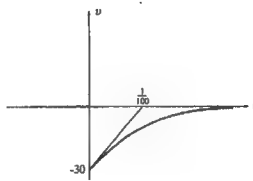
(b)



(c)



(d)



(e)

شكل 7-6

بفرض أن المفتاح  $S$  كان مغلقاً لفترة طويلة فإن تيار العنصر الحثي (الملف) يكون ثابتاً وجهده صفراً. ويكون التيار عند  $t = 0$  كما هو مبين شكل 7-6(b) وقيمة التيار  $i(0^-) = 12/4 = 3A$  وعند فصل البطارية عن  $t > 0$  فإن التيار سيكون كما هو مبين شكل 7-6(c). ولقيم  $t > 0$  فإن التيار سيتناقص آسباً من القيمة 3A إلى الصفر. وثابت الزمن للدائرة هو  $L/R = (1/100)s$  وباستخدام نتائج مثال 7-3 لقيم  $t > 0$  فإن تيار الملف والجهه على التوالي يكون:

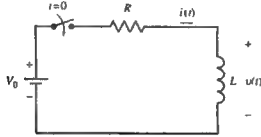
$$i(t) = 3e^{-100t} \text{ (A)}$$

$$v(t) = L(di/dt) = -30e^{-100t} \text{ (V)}$$

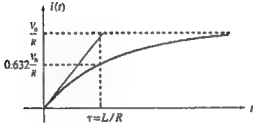
ورسم تغير كل من  $i(t)$ ،  $v(t)$  بالنسبة للزمن موضح في شكل (d) 7-6، (c) على التوالي .

### 7-5 بناء تيار مستمر في الملف :

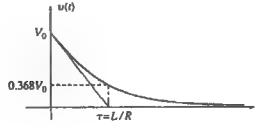
إذا وصلنا منبع تيار مستمر فجأة لدائرة توالى  $RL$  ولم تكن الدائرة متصلة بأى منبع من قبل كما في شكل (a) 7-7. فإن التيار سيزداد أسياً من القيمة صفر إلى قيمة ثابتة بثابت زمنى  $L/R$  والناجم السابق هو حل للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى (8) والتي تم الحصول عليها باستخدام KVL حول الحلقة والحل كما يلي :



(a)



(b)



(c)

شكل 7-7

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 \quad \text{for } t > 0, \quad i(0^+) = 0 \quad (8)$$



بما أن  $i_p(t) = V_0/R$  ،  $i_h(t) = Ae^{-Rt/L}$  ، حيث  $i = i_h(t) + i_p(t)$  لذا :

$$i = Ae^{-Rt/L} + V_0/R$$

المعامل  $A$  يوجد من العلاقة  $i(0^+) = A + V_0/R = 0$  أو  $A = -V_0/R$  . ويكون التيار في الملف والجهد على طرفيه كما هو مبين في المعادلة (9) والمعادلة (10) وكما هو مرسوم في شكل (7-7(b) ، (c) ، على التوالي .

$$i(t) = V_0/R(1 - e^{-Rt/L}) \quad \text{for } t > 0 \quad (9)$$

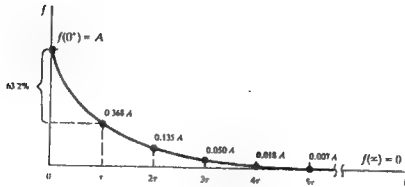
$$v(t) = L \frac{di}{dt} = V_0 e^{-Rt/L} \quad \text{for } t > 0 \quad (10)$$

## 7-6 الدالة الأسية المسترجعة

يمكن كتابة الدالة الأسية المتناقصة بالشكل  $e^{-t/\tau}$  حيث  $\tau$  هو ثابت الزمن بالثواني ولدائرة RC المبينة بند 7-2  $\tau = RC$  بينما لدائرة RL في بند 7-4  $\tau = L/R$  والدالة المتناقصة بشكل عام هي :

$$f(t) = Ae^{-t/\tau} \quad (t > 0)$$

وهي مرسومة في شكل 7-8 بأزمنة مضاعفات  $\tau$  ومنها :



شكل 7-8

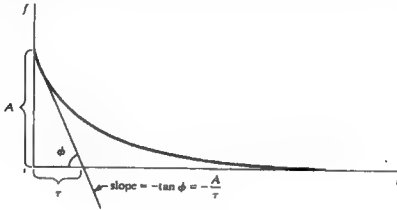
$$f(\tau) = Ae^{-1} = 0.368 A$$

أى أنه عند  $t = \tau$  فإن الدالة تكون 36.8% من قيمتها الابتدائية . ويمكن القول أيضاً أن الدالة قد استنفذت 63.2% من تغيرها من  $f(0^+)$  إلى  $f(\infty)$  . وعند  $t = 5\tau$  فإن الدالة يكون لها القيمة 0.0067A والتي تعتبر أقل من 1% من القيمة الابتدائية . وعملياً فإن الجزء العابر يعتبر متبهاً بعد  $t = 5\tau$  .

والمماس للمنحنى الأسى عند  $t = 0^+$  يمكن استخدامه لتقدير ثابت الزمن . فى الحقيقة حيث أن

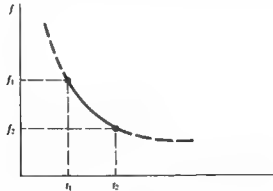
$$\text{slope} = f'(0^+) = -\frac{A}{\tau}$$

فإن المماس يجب أن يقطع المحور الأفقى عند  $t = \tau$  (انظر شكل 7-9) وعموماً فإن المماس عند  $t = t_0$  يتقاطع مع المحور الأفقى عند  $t_0 + \tau$  . وإذا كانت القيمتان  $f(t_0)$  ،  $f(t_0)$  معلومتين فإنه يمكن رسم المنحنى بالكامل .



شكل 7-9

وعندما يمكن تخطيط المنحنى على ورقة مربعات أو على شاشة أو سلكسكوب وتكون القيم المتعاقبة للدالة والميل غير متوفرة ففي هذه الحالة أى زوج من بيانات النقاط المقروءة من الأجهزة يمكن استخدامها لإيجاد معادلة المنحنى العابر وبالتالي بالرجوع إلى شكل 7-10 .



شكل 7-10

$$f_1 = Ae^{-t_1/\tau} \quad f_2 = Ae^{-t_2/\tau}$$

والتي يمكن حلها أيضاً لتعطي :

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln f_1 - \ln f_2}$$

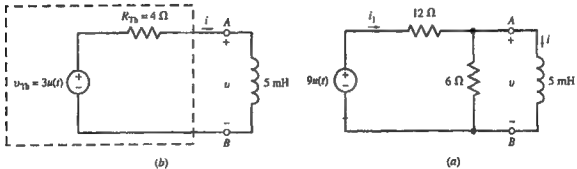
ومن ثم يمكن الحصول على A بدلالة  $\tau$  وكلا من  $f_1$  أو  $f_2$  .

## 7-7 ودوائر RC والمقعدة ذات الرتبة الأولى

يمكن حل الدوائر الأكثر تعقيداً والمحتوية على مقاومات منابع وعناصر تخزين الطاقة باستخدام مكافئ ثنائيين أو نورتون كما يبدو على طرفي ملف أو مكثف . وهذا يبسط الدائرة المقعدة إلى دائرة RC أو RL بسيطة والتي يمكن حلها بالطرق المشروحة سابقاً .

إذا تم توصيل منبع تيار مستمر في دائرة فجأة فإن التيارات والجهود الناتجة ستكون أسية ولها نفس ثابت الزمن وربما قيم ابتدائية ونهاية مختلفة . وثابت الزمن إما أن يكون RC أو  $L/R$  حيث R هي المقاومة في مكافئ ثنائي للدائرة بالنسبة لطرفي المكثف أو الملف .

مثال 7-5 : أوجد  $i$  ،  $v$  ،  $i_1$  في شكل 7-11(a) :



شكل 7-11

مكافئ تغين للدائرة التى على يسار الملف المبينة بشكل 7-11(b) مع القيم  $R_{Th} = 4\Omega$ ،  
 $v_{Th} = 3u(t)$  (V). وثابت الزمن للدائرة هو  $\tau = L/R_{Th} = 5(10^{-3}) / 4 \text{ s} = 1.25 \text{ s}$  والقيمة  
 الابتدائية لتيار الملف يكون صفراً والقيم النهائية هي:

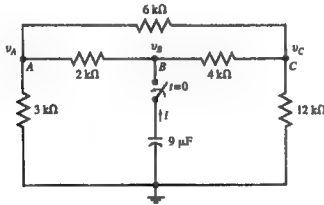
$$i(\infty) = \frac{v_{Th}}{R_{Th}} = \frac{3 \text{ V}}{4 \Omega} = 0.75 \text{ A}$$

وبذلك

$$i = 0.75(1 - e^{-800t}) \mu(t) \text{ (A)} \quad v = L \frac{di}{dt} = 3e^{-800t} \mu(t) \text{ (V)} \quad i_1 = \frac{9-v}{12} = \frac{1}{4}(3 - e^{-800t}) \mu(t) \text{ (A)}$$

يمكن إيجاد قيمة  $v$  أيضاً مباشرة من قيمتها الابتدائية  $3\text{V}$  ومن  $v(0^+) = (9 \times 6) / (12 + 6) = 3\text{V}$  وقيمها النهائية  $v(\infty) = 0$  وأيضاً الثابت الزمني للدائرة.

مثال 7-6 : وصل مكثف  $9\text{-}\mu\text{F}$  كما فى شكل 7-12 للدائرة عند الزمن  $t = 0$  وفى هذا الوقت كان  
 جهد المكثف  $V_0 = 17 \text{ V}$ . أوجد  $i_{BC}$ ،  $i_{AB}$ ،  $v_C$ ،  $v_B$ ،  $v_A$  لقيم  $t > 0$ .



شكل 7-12

استخدم KCL عند العقد A، B، C للزمن  $t > 0$  لإيجاد الجهود بدلالة التيار  $i$ .

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)v_A - \frac{1}{2}v_B - \frac{1}{6}v_C = 0 \quad \text{or} \quad 6v_A - 3v_B - v_C = 0 \quad (11) \quad \text{العقدة A}$$

$$-\frac{1}{2}v_A + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)v_B - 10^3 i - \frac{1}{4}v_C = 0 \quad \text{or} \quad -2v_A + 3v_B - v_C = (4 \times 10^3)i \quad (12) \quad \text{العقدة B}$$

$$-\frac{1}{6}v_A - \frac{1}{4}v_B + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)v_C = 0 \quad \text{or} \quad -2v_A - 3v_B + 6v_C = 0 \quad (13) \quad \text{العقدة C}$$

بحل المعادلات (11)، (12)، (13) أيضاً نحصل على:

$$v_A = \frac{7}{3}(10^3)i \quad v_B = \frac{34}{9}(10^3)i \quad v_C = \frac{5}{3}(10^3)i$$

والدائرة من ناحية المكثف مكافئة لمقاومة  $R = v_B/i = 34/9 \text{ k}\Omega$  ويقوم المكثف بتفريغ جهده

الابتدائي  $V_0$  بشكل أسى ذو ثابت زمنى  $\tau = RC = (34/9)(10^3)(9 \times 10^{-6}) = 0.034 \text{ s}$  لقيم  $t > 0$  وتكون الجهود والتيارات كالتالى:

$$v_B = V_0 e^{-t/\tau} = 17e^{-1000t/34} \quad (\text{V})$$

$$i = -C \frac{dv_B}{dt} = (9 \times 17 \times 10^{-3}/34)e^{-1000t/34} = (4.5 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} \quad (\text{A})$$

$$v_A = \frac{7}{3}(10^3)i = 10.5e^{-1000t/34} \quad (\text{V}) \quad v_C = \frac{5}{3}(10^3)i = 12e^{-1000t/34} \quad (\text{V})$$

$$v_{AB} = v_A - v_B = -6.5e^{-1000t/34} \quad (\text{V}) \quad i_{AB} = v_{AB}/2000 = (-3.25 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} \quad (\text{A})$$

$$v_{AC} = v_A - v_C = -1.5e^{-1000t/34} \quad (\text{V}) \quad i_{AC} = v_{AC}/6000 = (-0.25 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} \quad (\text{A})$$

$$v_{BC} = v_B - v_C = 5e^{-1000t/34} \quad (\text{V}) \quad i_{BC} = v_{BC}/4000 = (1.25 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} \quad (\text{A})$$

جميع الجهود والتيارات دوال أسية لها نفس الثابت الزمنى وللتبسيط نستخدم عادة الوحدات

$\text{ms}$ ،  $\text{k}\Omega$ ،  $\text{mA}$ ،  $\text{V}$  لكل من الجهود والتيار والمقاومة والزمن على التوالى حتى يمكن حذف المضروب

$10^{-3}$ ،  $1000$  من المعادلة كما هو موضح باختصار فيما يلى:

$$v_A = 10.5e^{-t/34} \quad (\text{V}) \quad v_{AB} = -6.5e^{-t/34} \quad (\text{V}) \quad i_{AB} = -3.25e^{-t/34} \quad (\text{mA})$$

$$v_B = 17e^{-t/34} \quad (\text{V}) \quad v_{AC} = -1.5e^{-t/34} \quad (\text{V}) \quad i_{AC} = -0.25e^{-t/34} \quad (\text{mA})$$

$$v_C = 12e^{-t/34} \quad (\text{V}) \quad v_{BC} = 5e^{-t/34} \quad (\text{V}) \quad i_{BC} = 1.25e^{-t/34} \quad (\text{mA})$$

$$i = 4.5e^{-t/34} \quad (\text{mA})$$

## 7-8 حالات الاستقرار لدوائر التيار المستمر مع الملفات والمكثفات

كما ذكر في بند 7-1 فإن المركبة المعتادة الأسية لاستجابة دوائر RC ، RL للدخول السلمية يتلاشى مع الزمن . عند الزمن  $t = \infty$  تصل الدائرة إلى حالتها المستقرة وتكون الاستجابة ناتجة من مركبة التيار المستمر فقط .

ونظرياً فإن دوائر RC ، RL تصل إلى حالة الاستقرار للتيار المستمر فيما لا نهاية من الزمن . مع هذا فإنه عند  $t = 5 \tau$  فإن المركبة العابرة تصل إلى 0.67% من قيمتها الابتدائية وبعد مرور عشر أمثال من ثابت الزمن فإن المركبة العابرة تساوى 0.0045% من قيمتها الابتدائية وهى أقل من  $5 \times 10^{-6}$  حيث عند هذا الزمن يمكن اعتبار الوصول إلى الحالة المستقرة فى جميع التطبيقات العملية .

فى دوائر RLC للتيار المستمر المستقرة وباعتبار أنه لا يوجد تذبذبات مستمرة فى الدائرة فإن جميع التيارات والجهود فى الدائرة تكون ثابتة . وحينما يكون الجهد على طرفى المكثف ثابتاً فإن التيار المار خلاله يكون صفراً . وبذلك تبدو جميع المكثفات فى حالات التيار المستمر كما لو كانت دوائر مفتوحة . وبالمثل حينما يكون التيار فى الملف ثابتاً فإن الجهد على طرفيه يكون صفراً وبذلك تعتبر جميع الملفات كدائرة قصيرة فى حالات التيار المستمر المستقر . وتتحول الدائرة فى هذه الحالة كما لو كانت دائرة ذو مقاومة مادية التيار المستمر والتى يمكن إيجاد الجهود على المكثفات والتيارات المارة فى الملفات حيث أن جميع التيارات والجهود تكون ثابتة ولا يتطلب ذلك أى معادلات تفاضلية .

وحالة التيار المستمر المستقرة المذكورة سابقاً صحيحة للدوائر المحتوية أى عدد من الملفات والمكثفات ومنايع التيار المستمر .

**مثال 7-7 :** أوجد قيم الحالة المستقرة لكل من  $i_A$  ،  $v_{C1}$  ،  $v_{C2}$  فى الدائرة المبينة شكل (7-13(a)).

حينما نصل إلى حالة استقرار ستكون الدائرة كما هو مبين فى شكل (7-13(b)) ويمكن الحصول على تيار الملف وجهود المكثف بتطبيق KCL عند العقدتين A ، B فى شكل (7-13(b)).

$$\frac{v_A}{3} + \frac{v_A - v_B}{6} + \frac{v_A + 18 - v_B}{6} = 3 \quad \text{or} \quad 2v_A - v_B = 0 \quad \text{العقدة A}$$

$$\frac{v_B}{12} + \frac{v_B - v_A}{6} + \frac{v_B - 18 - v_A}{6} = 0 \quad \text{or} \quad -4v_A + 5v_B = 36 \quad \text{العقدة B}$$

وبالحل لإيجاد  $v_A$ ،  $v_B$ ، نجد أن  $v_A = 6 \text{ V}$ ،  $v_B = 12 \text{ V}$  وباستخدام شكل 7-13(b) نحصل

$$\text{على } i_L = 2 \text{ mA}، v_{C1} = 8 \text{ V}، v_{C2} = 6 \text{ V}.$$

مثال 7-8 : أوجد  $i$ ،  $v$  للدائرة المبينة شكل 7-14.

عند  $t = 0$  فإن الجهد على طرفي المكثف يكون صفراً ويكون قيمته النهائية بتحليل التيار المستمر

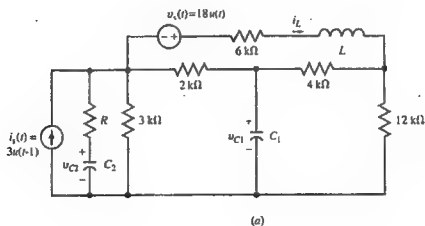
2V وثابت الزمن للدائرة شكل 7-14 كما هو مستنتج في مثال 7-6 هو 0.034 s لذلك :

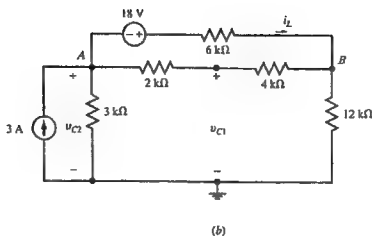
$$v = -2(1 - e^{-1000t/34})u(t) \quad (\text{V})$$

$$i = C \frac{dv}{dt} = -\frac{(9 \times 10^{-6})(2 \times 10^3)}{34} e^{-1000t/34} u(t) \quad (\text{A}) = -0.53 e^{-1000t/34} u(t) \quad (\text{mA})$$

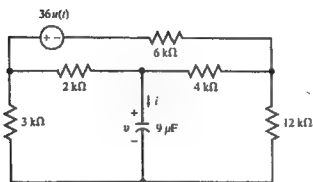
## 7-9 الحالات الإنتقالية عند حدوث الفصل والتوصيل

يتسبب فصل أو توصيل المنبع فجأة وكذلك التغيير المفاجئ في قيمته في تغيير مفاجئ للجهود والتيارات في الدائرة. ويحتاج التغيير المفاجئ في الجهد على المكثف إلى تيار دفعي وكذلك التغيير المفاجئ في تيار الملف يتطلب دفعة في الجهد. وإذا لم توجد هذه الدفعات فإن جهود المكثف والتيارات الملف تظل مستمرة. لذلك فإن حالات C، L بعد عملية الفصل أو التوصيل يمكن استنتاجها من حالاتها قبل الفصل أو التوصيل.





شكل 7-13



شكل 7-14

مثال 7-9 : إقفل المفتاح S عند الزمن  $t = 0$ . أوجد  $i$ ،  $v$  لجميع الأزمنة لشكل 7-15(a).

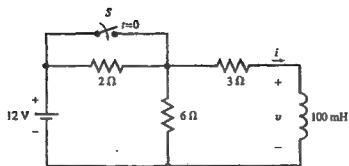
عند  $t = 0^-$  تكون الدائرة في حالة استقرار ويكون الملف كدائرة قصر بجهد  $v(0^-) = 0$  [انظر شكل 7-15(b)]. وبذلك يسهل الحصول على تيار الملف وهو  $i(0^-) = 2$  A وبعد قفل S عند  $t = 0$  فإن الدائرة ستكون كما في شكل 7-15(c). وعند  $t > 0$  يكون التيار أسياً بثابت زمني  $\tau = L/R = 1/30$  s وقيمة ابتدائية  $i(0^+) = i(0^-) = 2$  A وقيمة نهائية  $i = 4$  A -  $12/3$  ويكون جهد وتيار الملف.

$$i = 2 \text{ A and } v = 0 \quad \text{عند } t < 0$$

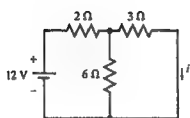
$$i = 4 - 2e^{-30t} \text{ (A) and } v = L \frac{di}{dt} = 6e^{-30t} \text{ (V)} \quad \text{عند } t < 0$$

وذلك موضح بشكل 7-15 (d, e)

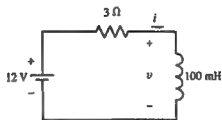




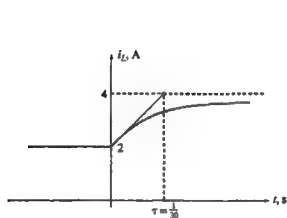
(a)



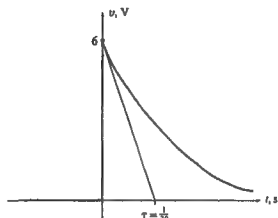
(b)



(c)



(d)

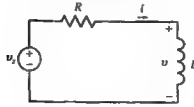


(e)

شكل 7-15

مثال 7-10 : أوجد  $i$ ،  $v$  لقيم  $t = 0^+$ ، في الدائرة المبينة شكل 7-16 إذا كان  $R = 5\Omega$ ،  $L = 10\text{ mH}$ .

$$v_s = \begin{cases} 5 \text{ V} & \text{for } t < 0 \\ 5 \sin \omega t \text{ (V)} & \text{for } t > 0 \end{cases}$$



شكل 7-16

عند  $t = 0^-$  ،  $i(0^-) = 5/5 = 1 \text{ A}$  ،  $v(0^-) = 0$  أثناء الزمن الانتقالي من  $t = 0^-$  إلى  $t = 0^+$  يكون تيار الملف مستمراً حيث لا يوجد جهد دفعي لإحداث الانقطاع له . وبذلك فإن  $i(0^+) = i(0^-) = 1 \text{ A}$  ولإيجاد  $v(0^+)$  أكتب KVL عند  $t = 0^+$  ومنها  $v_s = RI + v$  لاحظ أن  $v_s(0^+) = 0$  لذلك فإن  $v(0^+) = v_s(0^+) - Ri(0^+) = -5 \text{ V}$ .

### 7-10 استجابة دوائر الرتبة الأولى مع النبضة

في هذا الباب سنستجيب استجابة دوائر الرتبة الأولى مع النبضة المستطيلة ويطبق الاستنتاج لدوائر RC ، RL حيث يكون الدخول إما تياراً أو جهداً . وسنستخدم كمثال دائرة التوالى RC المبينة شكل 7-17(a) إذا كان منبع الجهد يعطى نبضة زمن بقائها T وارتفاعها  $V_0$  . لقيم  $t < 0$  يكون من  $v$  ،  $i$  صفراً . أما أثناء وجود النبضة نستخدم (6b) ، (6c) في بند 7-3 .

$$v = V_0(1 - e^{-t/RC}) \quad (0 < t < T) \quad (14a)$$

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad (0 < t < T) \quad (14b)$$

وحينما تتوقف النبضة فإن الدائرة تكون بدون منبع مع المكثف ذو الجهد الابتدائي  $V_T$  .

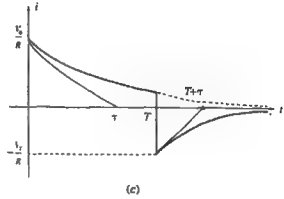
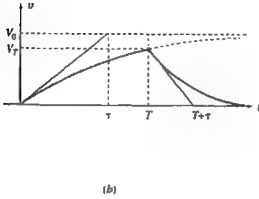
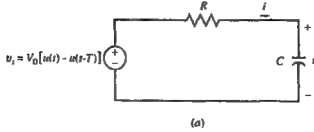
$$V_T = V_0(1 - e^{-T/RC}) \quad (14c)$$

باستخدام (3) ، (4) في بند 7-2 وأخذاً في الاعتبار إزاحة الزمن T نحصل على :

$$v = V_T e^{-(t-T)/RC} \quad (t > T) \quad (15a)$$

$$i = -(V_T/R) e^{-(t-T)/RC} \quad (t > T) \quad (15b)$$

ورسم كلا من تغير جهد المكثف والتيار في شكل 7-17(b)، (c).



شكل 7-17

**مثال 7-11 :** في الدائرة المبينة شكل 7-17(a) إذا كان  $C = 1 \mu F$ ،  $R = 1 k\Omega$  و  $V_0 = 1 V$ ،  $T = 1 ms$ ،  $V_T = 0.632 V$ ،  $T = 0.01 ms$ ،  $V_0 = 100 V$ ،  $T = 0.1 ms$ ،  $V_0 = 10 V$ .

نستخدم المعادلة 14، 15 يثبت الزمن  $\tau = RC = 1 ms$  وللتذكيرة فلنأخذ سنعتبر عن الزمن بالمللي ثانية (ms) والجهد بالفولت (V) والتيار بالمللي أمبير (mA) ونستخدم أيضاً القيمة الأسية  $1 - e^{-t}$  حيث  $t \ll 1$ .

(أ) لقيم  $T = 1 ms$ ،  $V_0 = 1 V$ ،  $0 < t < 1 ms$  في الفترة

$$v = (1 - e^{-t}), \quad i = e^{-t}, \quad \text{and} \quad V_T = (1 - e^{-1}) = 0.632 V$$

ولقيم  $t > 1 ms$

$$v = 0.632e^{-(t-1)} = 1.72e^{-t}, \quad \text{and} \quad i = -1.72e^{-t}$$

(ب) لقيم  $T = 0.1 \text{ ms}$  ،  $V_0 = 10 \text{ V}$  ، في الفترة  $0 < t < 0.1 \text{ ms}$

$$v = 10(1 - e^{-t}), i = 10e^{-t}, \text{ and } V_T = 10(1 - e^{-0.1}) = 0.95 \text{ V}$$

لقيم  $t > 0.1 \text{ ms}$

$$v = 0.95e^{-(t-0.1)} = 1.05e^{-t}, \text{ and } i = -1.05e^{-t}$$

(ج) لقيم  $T = 0.01 \text{ ms}$  ،  $V_0 = 100 \text{ V}$  ، في الفترة  $0 < t < 0.01 \text{ ms}$

$$v = 100(1 - e^{-t}) \approx 100t, i = 100e^{-t} \approx 100(1 - t), \text{ and } V_T = 100(1 - e^{-0.01}) = 0.995 \text{ V}$$

لقيم  $t > 0.01 \text{ ms}$

$$v = 0.995e^{-(t-0.01)} = 1.01e^{-t} \text{ and } i = -1.01e^{-t}$$

وحينما تقترب نبضة الدخل لتكون دفعة فإن جهد المكثف وتياره يقتربان من  $v = e^{-t} \mu(t) \text{ V}$  ،

$$i = \delta(t) - e^{-t} \mu(t)$$

## 7-11 الاستجابة الدفعية لدوائر RC و RL

يمكن تمثيل النبضة الضيقة لتكون دفعة تحدد قوتها المساحة تحت النبضة . والاستجابة الدفعية وسيلة مفيدة في تحليل ومعرفة تركيب الدوائر . ويمكن الحصول عليها بطرق متعددة . وأخذ النهاية لاستجابة النبضة الضيقة لتسمى حد التقارب كما في مثال 7-11 ، 7-12 وبأخذ تفاضل الاستجابة السكّمية وبحل المعادلة التفاضلية مباشرة . ويعبر عن التجاوب الدفعي بالرمز  $h(t)$  .

مثال 7-12 : أوجد حدى كلا من  $i$  ،  $v$  للدائرة المبينة شكل 7-17(a) لنبضة جهد مساحتها الوحدة إذا قلت فترة بقاؤها إلى الصفر .

استخدم الاستجابة النبضية في المعادلة (14) ، (15) باعتبار  $V_0 = 1/T$  وأوجد حدود نهايتها حينما  $T$  تقترب من الصفر . من المعادلة (14-c) نحصل على :

$$\lim_{T \rightarrow 0} V_T = \lim_{T \rightarrow 0} (1 - e^{-TIRC})/T = 1/RC$$

من المعادلة رقم 15 نحصل على :

$$\begin{aligned} \text{For } t < 0, \quad & h_v = 0 \quad \text{and} \quad h_i = 0 \\ \text{For } 0^- < t < 0^+, \quad & 0 \leq h_v \leq \frac{1}{RC} \quad \text{and} \quad h_i = \frac{1}{R} \delta(t) \\ \text{For } t > 0, \quad & h_v(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \quad \text{and} \quad h_i(t) = -\frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC} \end{aligned}$$

ولذلك :

$$h_v(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \quad \text{and} \quad h_i(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC} u(t)$$

**مثال 7-13 :** أوجد الاستجابة الدفعية لدائرة RC المبينة شكل (a) 7-17. بأخذ تفاضل استجابتها للوحدة السُّلمية.

يمكن اعتبار الوحدة الدفعية هي تفاضل الوحدة السُّلمية. وباعتبار خواص المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة فإننا يمكن أخذ التفاضل للتجاوب السُّلمى بالنسبة للزمن لإيجاد الاستجابة الدفعية. استجابة الوحدة السُّلمية لدائرة RC وجدت من المعادلة (6) لتكون :

$$v(t) = (1 - e^{-t/RC})u(t) \quad \text{and} \quad i(t) = (1/R)e^{-t/RC}u(t)$$

نوجد استجابة دفعة الوحدة بأخذ تفاضلات الاستجابة السُّلمية لذلك :

$$h_v(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \quad \text{and} \quad h_i(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC} u(t)$$

**مثال 7-14 :** أوجد الاستجابة الدفعية  $h_v(t)$ ،  $h_o(t)$ ،  $h_i(t)$  لدائرة RL المبينة فى شكل (a) 7-11 بأخذ تفاضلات استجابات الوحدة السُّلمية.

استجابات الدائرة لنضمة سلمية قيمتها العظمى 9 سبق إيجادها فى مثال 7-5. وبأخذ تفاضلاتها وتغيير قيمها بالقيمة 1/9 نجد أن استجابات الوحدة الدفعية هي :

$$\begin{aligned} h_i(t) &= \frac{1}{9} \frac{d}{dt} [0.75(1 - e^{-800t})u(t)] = \frac{200}{3} e^{-800t} u(t) \\ h_v(t) &= \frac{1}{9} \frac{d}{dt} [3e^{-800t} u(t)] = -\frac{800}{3} e^{-800t} u(t) + \frac{1}{3} \delta(t) \\ h_{i1}(t) &= \frac{1}{9} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{4} (3 - e^{-800t})u(t) \right] = \frac{200}{9} e^{-800t} u(t) + \frac{1}{18} \delta(t) \end{aligned}$$

## 7-12 ملخص استجابات النبضة والدفعة في دوائر RC، RL

تم تلخيص استجابات دوائر RC، RL لدخل النبضة أو الدفعة في جدول 7-1 وبعض هذه القيم في الجدول تم الحصول عليها في البنود السابقة والباقي سيتم الحصول عليه في المسائل المحلولة.

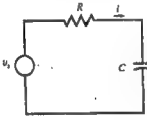
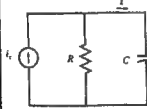
## 7-13 استجابة دوائر RC، RL للتغذية الاسية المفاجئة

إذا اعتبرنا المعادلة التفاضلية ذات الدرجة الأولى المستتجة مركبة RL على التوالي مع منبع جهد أسي مفاجئ  $v_s = V_0 e^{st} u(t)$  كما في دائرة شكل 7-18. تكون الدائرة في حالة سكون عند  $t < 0$  وباستخدام KVL نحصل على:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 e^{st} u(t) \quad (16)$$

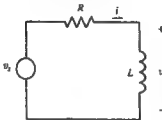
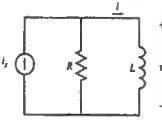
## جدول (a) 7-1

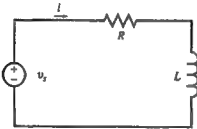
تجاوب النبضة السلبية والدفعة في دوائر RC

دوائر RC	تجاوب وحدة النبضة	تجاوب وحدة الدفعة
	$v_s = u(t)$ $\begin{cases} v = (1 - e^{-t/RC})u(t) \\ i = (1/R)e^{-t/RC}u(t) \end{cases}$	$v_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (1/RC)e^{-t/RC}u(t) \\ h_i = -(1/R^2C)e^{-t/RC}u(t) + (1/R)\delta(t) \end{cases}$
	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} v = R(1 - e^{-t/RC})u(t) \\ i = e^{-t/RC}u(t) \end{cases}$	$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (1/C)e^{-t/RC}u(t) \\ h_i = -(1/RC)e^{-t/RC}u(t) + \delta(t) \end{cases}$

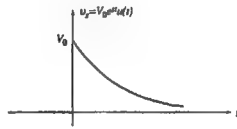
## جداول 7-1 (b)

تجاوب النبضة والدفع في دوائر RL

دوائر RC	تجاوب وحدة النبضة	تجاوب وحدة الدفع
	$v_s = u(t)$ $\begin{cases} v = e^{-Rt/L} u(t) \\ i = (1/R)(1 - e^{-Rt/L}) u(t) \end{cases}$	$v_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (R/L)e^{-Rt/L} u(t) + \delta(t) \\ h_i = (1/L)e^{-Rt/L} u(t) \end{cases}$
	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} v = R e^{-Rt/L} u(t) \\ i = (1 - e^{-Rt/L}) u(t) \end{cases}$	$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = -(R^2/L)e^{-Rt/L} u(t) + R\delta(t) \\ h_i = (R/L)e^{-Rt/L} u(t) \end{cases}$



(a)



(b)

شكل 7-18

لقيم  $t > 0$  فإن الحل يكون:

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \quad \text{and} \quad i(0^+) = 0 \quad (17a)$$

الاستجابة الطبيعية للدالة  $i_h(t)$  هو حل المعادلة  $Ri + L (di/dt) = 0$  وهي حالة الدالة القسرية

الصفرية وياتبع إزاحة مماثلة لما في بند 7-4 نحصل على:

$$i_h(t) = A e^{-Rt/L} \quad (17b)$$

والاستجابة القسرية  $i_p(t)$  هي دالة تحقق المعادلة (16) لقيم  $t > 0$  والدالة الوحيدة لذلك هي :

$$i_p(t) = I_0 e^{st} \quad (17c)$$

وبعد التعويض بالقيمة  $i = i_h + i_p$  في المعادلة (16) فإن  $I_0$  تكون  $I_0 = V_0 / (R + Ls)$  وباختيار  $A = -V_0 / (R/Ls)$  فإن حدود النهاية وهي  $i(0^+) = 0$  تكون أيضاً محققة ولذلك :

$$i(t) = \frac{V_0}{R + Ls} (e^{st} - e^{-Rt/L}) u(t) \quad (17d)$$

### حالة خاصة :

إذا كانت الدالة القسرية لها نفس القيمة الأسية كما في الاستجابة الطبيعية ( $s = -R/L$ ) فإن الاستجابة القسرية يجب أن تكون  $i_p(t) = I_0 e^{-Rt/L}$  ويمكن تحقيق ذلك في المعادلة (16) والتي تؤول أيضاً  $I_0 = V_0/L$  . والاستجابة الطبيعية تكون كما في 17(b) . وبذلك تكون الاستجابة الكلية :

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = (I_0 t + A) e^{-Rt/L}$$

From  $i(0^-) = i(0^+) = 0$  we find  $A = 0$ , and so  $i(t) = I_0 t e^{-Rt/L} u(t)$ , where  $I_0 = V_0/L$ .

## 7-14 استجابة دوائر RL, RC للتغذية الجيبية المفاجئة

حينما نصل دائرة توالى RL بمنبع تيار متردد  $v_s = V_0 \cos \omega t$  فجأة كما في شكل 7-19 فإن المعادلة المعول عليها تكون :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 (\cos \omega t) u(t) \quad (18)$$

وبذلك يكون الحل :

$$i(t) = i_h + i_p \quad \text{where} \quad i_h(t) = A e^{-Rt/L} \quad \text{and} \quad i_p(t) = I_0 \cos(\omega t - \theta)$$

وبإدخال  $i_p$  في المعادلة (18) نجد أن  $I_0$  .

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{L\omega}{R}$$

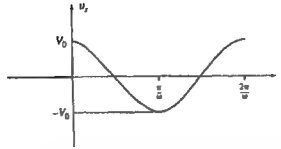


وبذلك

$$i(t) = Ae^{-Rt/L} + I_0 \cos(\omega t - \theta) \quad t > 0$$

ومن  $i(0^+) = 0$  نحصل على  $A = -I_0 \cos \theta$  وبذلك :

$$i(t) = I_0 [\cos(\omega t - \theta) - \cos \theta (e^{-Rt/L})]$$



شكل 7-19

## 7-15 ملخص الاستجابة القسرية في دوائر الرتبة الاولى

باعتبار المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dv}{dt}(t) + av(t) = f(t) \quad (19)$$

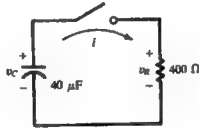
تعتمد الاستجابة القسرية  $v_p(t)$  على الدالة القسرية  $f(t)$  . وقد أعطيت عدة أمثلة في البنود السابقة . والجدول 7-2 يلخص بعض الأزواج المفيدة للدوال القسرية وما هو مقترح لقيم  $v_p(t)$  . ونحصل على الاستجابات بالتعويض في المعادلة التفاضلية . ويمكن استنتاج الاستجابات القسرية لدوال جديدة باستخدام التوليفات الخطية الموجودة في جدول 7-2 وزمن التأخير لها .

## جدول 7-2

	$f(t)$	$v_p(t)$
	1	$\frac{1}{a}$
$n$	$t$	$\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}$
$n$	$e^{st}, (s \neq -a)$	$\frac{e^{st}}{s+a}$
	$e^{-at}$	$te^{-at}$
$n$	$\cos \omega t$	$A \cos(\omega t - \theta)$ where $A = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$ and $\tan \theta = \frac{\omega}{a}$
$n$	$e^{-bt} \cos \omega t$	$A e^{-bt} \cos(\omega t - \theta)$ where $A = \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2 + \omega^2}}$ and $\tan \theta = \frac{\omega}{a-b}$

### مسائل محلولة

7-1 عند  $t = 0^-$  ومباشرة قبل قفل المفتاح في شكل 7-20 كانت  $v_C = 100 \text{ V}$ . أوجد القيم العابرة للتيار والشحنة.



شكل 7-20

باستخدام الإشارات المبينة في الشكل فإن  $v_R = v_C$  لقيم  $t > 0$ ،  $1/RC = 62.5 \text{ s}^{-1}$ ، وأيضاً  $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 100 \text{ V}$  ولذلك:

$$v_R = v_C = 100e^{-62.5t} \text{ (V)} \quad i = \frac{v_R}{R} = 0.25e^{-62.5t} \text{ (A)} \quad q = Cv_C = 4000e^{-62.5t} \text{ (}\mu\text{C)}$$

7-2 في المسألة 7-1 أوجد القدرة والطاقة في المقاومة وقارن الطاقة المستهلكة في المقاومة بالطاقة الابتدائية المخزنة في المكثف .

$$p_R = v_R i = 25e^{-125t} \text{ (W)}$$

$$w_R = \int_0^t p_R dt = \int_0^t 25e^{-125t} dt = 0.20(1 - e^{-125t}) \text{ (J)}$$

الطاقة الابتدائية المخزنة :

$$W_0 = \frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{1}{2} (40 \times 10^{-6})(100)^2 \text{ J} = 0.20 = w_R(\infty)$$

أى أن الطاقة الكلية في المكثف قد استوعبت في المقاومة حيث تحولت إلى حرارة .

7-3 حالة عابرة ناشئة عن RC مطابقة لما هو في المسألة 7-1 ، 7-2 لها قدرة عابرة هي :

$$p_R = 360e^{-t/0.00001} \text{ (W)}$$

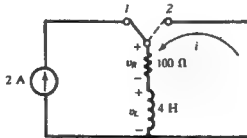
أوجد الشحنة الابتدائية  $Q_0$  إذا كانت  $R = 10 \Omega$  .

$$p_R = P_0 e^{-2t/RC} \quad \text{or} \quad \frac{2}{RC} = 10^5 \quad \text{or} \quad C = 2 \mu\text{F}$$

$$w_R = \int_0^t p_R dt = 3.6(1 - e^{-t/0.00001}) \text{ (mJ)}$$

وبذلك  $Q_0 = 120 \mu\text{C}$  ومنها  $W_R(\infty) = 3.6 \text{ mJ} = Q_0^2/2C$  .

7-4 تغيير وضع المفتاح في دائرة RL المبينة شكل 7-21 من الوضع 1 إلى الوضع 2 عند  $t = 0$  . أوجد  $v_L$  ،  $v_R$  باستخدام القطبيات المبينة .



شكل 7-21

يغذى منبع التيار الثابت تياراً خلال العنصر الحثي (الملف) في نفس اتجاه التيار العابر  $i$  ومن ثم لقيم  $t > 0$ .

$$i = I_0 e^{-Rt/L} = 2e^{-25t} \quad (A)$$

$$v_R = Ri = 200e^{-25t} \quad (V)$$

$$v_L = -v_R = -200e^{-25t} \quad (V)$$

7-5 للحالة العابرة في المسألة 7-4 أوجد  $R_L$ ،  $P_R$ .

$$p_R = v_R i = 400e^{-50t} \quad (W)$$

$$p_L = v_L i = -400e^{-50t} \quad (W)$$

يفسر القدرة السالبة للملف بالحقيقة أن الطاقة تخرج من العنصر وحيث أنها تتحول إلى المقاومة فإن  $P_R$  تكون موجبة.

7-6 دائرة التوالي RC التي بها  $R = 5 \text{ k}\Omega$ ،  $C = 20 \mu\text{F}$  متصلة بمنبع جهد ثابت  $100 \text{ V}$  عند الزمن

$t = 0$  ولم يكن هناك شحنة ابتدائية على المكثف. أوجد  $i$ ،  $v_R$ ،  $v_C$ ،  $q$  عند  $t > 0$ .

شحنة المكثف وكذلك جهده  $v_C$  يجب أن يكونا مستمرين عند  $t = 0$ .

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$$

حينما  $t$  تزول إلى ما لا نهاية ( $t \rightarrow \infty$ ) فإن  $v \rightarrow 100 \text{ V}$  وهو الجهد المسلط ويكون ثابت الزمن للدائرة  $\tau = RC = 10^{-1} \text{ s}$  وبذلك من بند 6-10.

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} + v_C(\infty) = -100e^{-10t} + 100 \quad (V)$$

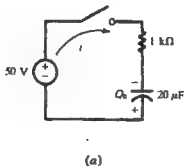
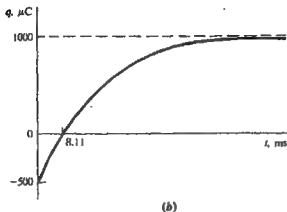
تستتج الدوال الأخرى منها من هذه المعادلة فإذا كان  $V_C$ ،  $V_R$  كلاهما موجب حيث يدخل التيار فإن  $v_R + v_C = 100 \text{ V}$  وبذلك:

$$v_R = 100e^{-10t} \quad (V)$$

$$i = \frac{v_R}{R} = 20e^{-10t} \quad (mA)$$

$$q = Cv_C = 2000(1 - e^{-10t}) \quad (\mu C)$$

7-7 أقفل مفتاح في الدائرة المبينة شكل 7-22(a) عند  $t = 0$  وفي نفس اللحظة كانت شحنة المكثف  $Q_0 = 500 \mu C$  بالإشارات المبينة. أوجد  $i$ ،  $q$  لقيم  $t > 0$  وارسم منحنى  $q$ .



شكل 7-22

الجهد المناظر للشحنة الابتدائية هو  $V_0 = Q_0/C = 25 V$  حيث تكون  $v_C(0^+) = -25 V$ . الإشارة السالبة سببها أن جهد المكثف المتفق مع الاتجاه الموجب للتيار يجب أن يأخذ الإشارة + على اللوح الأعلى. وأيضاً  $v_C(\infty) = +50 V$ ،  $\tau = 0.025$ ، وبذلك وكما في المسألة 7-6.

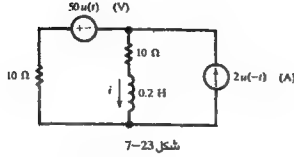
$$v_C = -75e^{-50t} + 50 \quad (V)$$

ومنها

$$q = Cv_C = -1500e^{-50t} + 1000 \quad (\mu C) \quad i = \frac{dq}{dt} = 75e^{-50t} \quad (mA)$$

والرسم في شكل 7-22(b) يبين أن الشحنة . تتغير من  $500 \mu C$  بقطبية سالبة إلى  $1000 \mu C$  بالقطبية الموجبة.

7-8 أوجد التيار  $i$  لجميع قيم  $t$  في الدائرة المبينة شكل 7-23.



لقيم  $t < 0$  يكون منبع الجهد مقصوراً ويوزع تيار المنبع  $2A$  بالتساوى بين المقاومتين  $10 \Omega$ .

$$i(t) = i(0^-) = i(0^+) = 1 A$$

لقيم  $t > 0$  يستبدل منبع التيار بدائرة مفتوحة ويؤثر المنبع  $50 V$  فى دائرة التوالى  $RL$  ( $R = 20 \Omega$ ) وبالتالى حيث  $t \rightarrow \infty$ ،  $i = -50/20 = -2.5 A$ ، ومن ثم من بندى 6-10 و 7-3.

$$i(t) = [i(0^+) - i(\infty)]e^{-t/\tau} + i(\infty) = 3.5e^{-100t} - 2.5 \quad (A)$$

ومن دوال الوحدة السلمية يمكن تجميع الصيغتين فى صيغة واحدة تصلح لجميع الأزمنة  $t$ .

$$i(t) = 1u(-t) + (3.5e^{-100t} - 2.5)u(t) \quad (A)$$

7-9 فى شكل 7-24(a) أقلل المفتاح عند  $t = 0$  ولم يكن للمكثف مشحوناً عند  $t < 0$ . أوجد  $i_R$ ،  $i_C$ ،  $v_S$ ،  $v_C$  لجميع الأزمنة إذا كان  $i_S = 2 mA$ .

لقيم  $t < 0$ ،  $v_S = (2 mA)(5000 \Omega) = 10 V$ ،  $i_C = v_C = 0$ ،  $i_R = 2 mA$ .

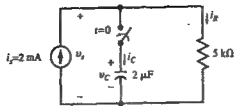
ولقيم  $t > 0$  فإن ثابت الزمن يكون  $\tau = RC = 10 ms$ .

$$i_R(0^+) = 0, \quad i_R(\infty) = 2 mA, \quad \text{and} \quad i_R = 2(1 - e^{-100t}) \quad (mA) \quad [\text{See Fig. 7-24(b).}]$$

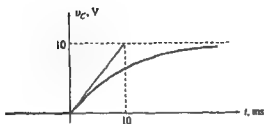
$$v_C(0^+) = 0, \quad v_C(\infty) = (2 mA)(5 k\Omega) = 10 V, \quad \text{and} \quad v_C = 10(1 - e^{-100t}) \quad (V) \quad [\text{See Fig. 7-24(c).}]$$

$$i_C(0^+) = 2 mA, \quad i_C(\infty) = 0, \quad \text{and} \quad i_C = 2e^{-100t} \quad (mA) \quad [\text{See Fig. 7-24(d).}]$$

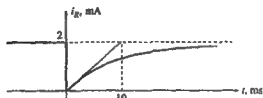
$$v_S(0^+) = 0, \quad v_S(\infty) = (2 mA)(5 k\Omega) = 10 V, \quad \text{and} \quad v_S = 10(1 - e^{-100t}) \quad (V) \quad [\text{See Fig. 7-24(e).}]$$



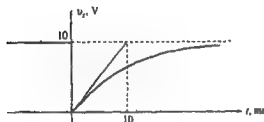
(a)



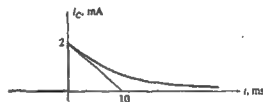
(c)



(b)



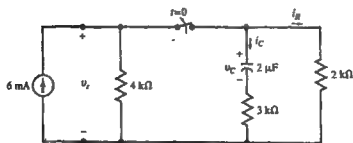
(e)



(d)

شكل 7-24

7-10 فتح المفتاح في شكل 7-25 عند  $t = 0$ . أوجد  $i_R$ ،  $i_C$ ،  $v_C$ ،  $v_s$ .



(a)

شكل 7-25

لقيم  $t < 0$  تكون الدائرة فى حالة استقرار مع  $i_C = 0$  ،  $i_R = 6(4) / (4 + 2) = 4 \text{ mA}$  ،  
 أثناء لحظة الفصل عند  $t = 0$  يبقى جهد المكثف على ما هو عليه وبعد فتح  
 المفتاح عند  $t = 0^+$  يكون المكثف بنفس الجهد  $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 8 \text{ V}$  . وعند  $t > 0$  يقوى المكثف  
 بالتفريغ فى المقاومة  $5 \text{ k}\Omega$  الناشئة من مقاومتى التوالى  $3 \text{ k}\Omega$  ،  $2 \text{ k}\Omega$  . ويكون ثابت الزمن للدائرة  
 $\tau = (2 + 3) (10^3) (2 \times 10^{-6}) = 0.01 \text{ s}$  . وتكون التيارات والجهد كما يلى :

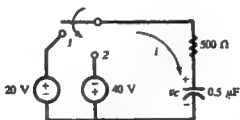
$$v_C = 8e^{-100t} \text{ (V)}$$

$$i_R = -i_C = v_C / 5000 = (8/5000)e^{-100t} = 1.6e^{-100t} \text{ (mA)}$$

$$v_i = (6 \text{ mA})(4 \text{ k}\Omega) = 24 \text{ V}$$

عند  $t > 0$  يمر التيار كله  $6 \text{ mA}$  خلال المقاومة  $4 \text{ k}\Omega$  .

7-11 المفتاح فى الدائرة المبينة شكل 7-26 وصل بالوضع 1 عند الزمن  $t = 0$  ثم تحرك إلى الوضع 2 بعد  
 مرور ثابت زمنى واحد عند  $t = \tau = 250 \mu\text{s}$  أوجد التيار عند  $t > 0$  .



شكل 7-26

من الأسهل أولاً أن نجد الشحنة على المكثف حيث من المعروف أنها مستمرة (عند  $t = 0$  ، عند  
 $t = \tau$ ) ثم نفاضلها للحصول على التيار .  
 لقيم  $0 \leq t \leq \tau$  فإن  $q$  تأخذ الشكل .

$$q = Ae^{-t/\tau} + B$$



ويفرض أن  $q(0) = 0$  ومن الحالة

$$i(0^+) = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = \frac{20 \text{ V}}{500 \Omega} = 40 \text{ mA}$$

نجد أن  $A = -B = -10 \mu\text{C}$

$$q = 10(1 - e^{-4000t}) \quad (\mu\text{C}) \quad (0 \leq t \leq \tau)$$

من معادلة رقم (20)  $q(\tau) = 10(1 - e^{-1}) \mu\text{C}$  ونعلم أن:

$$q(\infty) = (0.5 \mu\text{F})(-40 \text{ V}) = -20 \mu\text{C}.$$

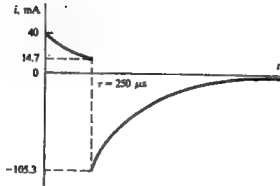
ولذلك فإن  $q$  لتحديد لقيم  $t \geq \tau$  كالتالي:

$$q = [q(\tau) - q(\infty)]e^{-t/\tau} + q(\infty) = 71.55e^{-4000t} - 20 \quad (\mu\text{C}) \quad (21)$$

وبتفاضل (20)، (21) فإن:

$$i = \frac{dq}{dt} = \begin{cases} 40e^{-4000t} & (\text{mA}) \quad (0 < t < \tau) \\ -286.2e^{-4000t} & (\text{mA}) \quad (t > \tau) \end{cases}$$

انظر شكل 7-27



شكل 7-27

7-12 دائرة توالى عليها جهد ثابت  $V$  عند  $t = 0$  . عند أى زمن تكون  $v_R = v_L$  .

تيار دائرة  $RL$  يكون متصلاً مبتدأ فى هذه الحالة من الصفر . ويصل إلى قيمة نهائية  $V/R$  . وبذلك عند  $t > 0$  .

$$i = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{and} \quad v_R = Ri = V(1 - e^{-t/\tau})$$

حيث  $\tau = L/R$  هو ثابت الزمن للدائرة . وحيث أن  $v_R + v_L = V$  فإن الجهدين سيكونان متساويين حينما :

$$v_R = \frac{1}{2}V$$

$$V(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{1}{2}V$$

$$e^{-t/\tau} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t}{\tau} = \ln 2$$

أى أن عند  $t = 0.693 \tau$  . لاحظ أن هذا الزمن لا يتوقف على  $V$  .

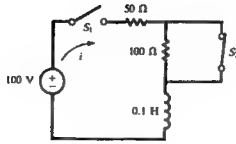
7-13 وصل جهد ثابت لدائرة توالى  $RL$  عند  $t = 0$  وكان الجهد على الملف  $20V$  عند  $3.46 \text{ ms}$  ،  $5 \text{ V}$  عند  $25 \text{ ms}$  . أوجد  $R$  إذا كانت  $L = 2 \text{ H}$  .

باستخدام طريقة النقطتين التى فى بند 7-6 .

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln v_1 - \ln v_2} = \frac{25 - 3.46}{\ln 20 - \ln 5} = 15.54 \text{ ms}$$

$$R = \frac{L}{\tau} = \frac{2}{15.54 \times 10^{-3}} = 128.7 \Omega \quad \text{وكذلك}$$

7-14 أقفل المفتاح  $S_1$  عند الزمن  $t = 0$  وفتح المفتاح  $S_2$  عند الزمن  $t = 4 \text{ ms}$  أوجد  $i$  لقيم  $t > 0$  . فى شكل 7-28 .



شكل 7-28

حيث أنه يوجد حث في الدائرة بصفة دائمة فإن التيار يكون دالة مستمرة في جميع الأوقات .

وفي الفترة  $0 \leq t \leq 4 \text{ ms}$  أثناء قصر المقاومة  $100 \Omega$  ومع ثابت زمني  $\tau = (0.1 \text{ H}) / (50 \Omega) = 2 \text{ ms}$  فإن  $i$  يبدأ من الصفر ويزداد إلى القيمة .

$$\frac{100 \text{ V}}{50 \Omega} = 2 \text{ A}$$

ومع هذا فإنه لا يصل إليها بالضبط . ولذلك كما في المسألة 7-12 .

$$i = 2(1 - e^{-t/2}) \text{ (A)} \quad (0 \leq t \leq 4) \quad (22)$$

وعند قياس  $t$  بالمللي ثانية فإن :

$$i(4) = 2(1 - e^{-2}) = 1.729 \text{ A}$$

في الفترة  $t \geq 4 \text{ ms}$  فإن  $i$  يبدأ عند القيمة  $1.729 \text{ A}$  ويتناقص نحو القيمة  $100/150 = 0.007 \text{ A}$

بثابت زمني  $0.1/150 = 2/3 \text{ ms}$  وبذلك مرة أخرى مع  $t$  مقاسة بالمللي ثانية فإن :

$$i = (1.729 - 0.667)e^{-(t-4)/(2/3)} + 0.667 = 428.4e^{-3t/2} + 0.667 \text{ (A)} \quad (t \geq 4) \quad (23)$$

7-15 اقلل ا لفتتاح عند  $t = 0$  في الدائرة شكل 7-29 حينما كان المكثف  $6 \mu\text{F}$  عليه الشحنة

$Q_0 = 300 \mu\text{C}$  أوجد تعبيراً للجهد العابر  $v_R$  .

المكثف المكافئ  $3 \mu\text{F}$  يقرم مقام مكثفي التوازي وبذلك يكون هذا المكثف على التوالي مع

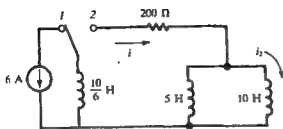
المكثف  $6 \mu\text{F}$  حيث تكون السعة الكلية المكافئة  $2 \mu\text{F}$  وبذلك  $\tau = RC_{eq} = 40 \text{ ms}$  .

عند  $t = 0^+$  فإن KVL تعطي  $v_R = 300/6 = 50$  V ، وحيث أن  $t \rightarrow \infty$  ، حيث  $v_R \rightarrow 0$  .

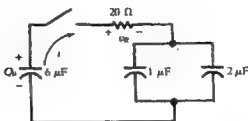
وبذلك :

$$v_R = 50 e^{-t/\tau} = 50 e^{-t/100} \text{ (V)}$$

حيث  $t$  تقاس بالكيلو ثانية (كـ).)



شكل 7-30



شكل 7-29

7-16 في شكل 7-30 نحرك المفتاح إلى الوضع 2 عند  $t = 0$  . أوجد التيار  $i_2$  عند  $t = 34.7$  ms .

بعد حركة المفتاح يكون الحث المكافئ للثلاث ملفات هو :

$$L_{eq} = \frac{10}{6} + \frac{5(10)}{15} = 5 \text{ H}$$

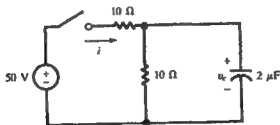
وبذلك  $\tau = 5/200 = 25$  ms ، وكذلك عند قياس  $t$  بالمللي ثانية فإن :

$$i = 6e^{-t/25} \text{ (A)} \quad i_2 = \left(\frac{5}{15}\right)i = 2e^{-t/25} \text{ (A)}$$

and

$$i_2(34.7) = 2e^{-34.7/25} \text{ A} = 0.50 \text{ A}$$

7-17 أقلل المفتاح في شكل 7-31 عند  $t = 0$  . أوجد التيار  $i$  وجهد المكثف  $v_C$  عند  $t > 0$  .



شكل 7-31

باعتبار الاستجابة الطبيعية للدائرة . فإن المقاومتين يكونان على التوازي ولذلك :

$$r = R_{eq} C = (5 \Omega)(2 \mu F) = 10 \mu s$$

ومع مرور الوقت  $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$  . وعندما  $t \rightarrow \infty$  فإن المكثف يصبح دائرة مفتوحة تاركاً المقاومة  $20 \Omega$  مع المتبق  $50 V$  على التوالي . أى أن :

$$i(\infty) = \frac{50}{20} = 2.5 A \quad v_C(\infty) = (2.5 A)(10 \Omega) = 25 V$$

ومعرفة الحالات النهائية للجهد  $v_C$  فيمكن كتابة :

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/r} + v_C(\infty) = 25(1 - e^{-t/10}) \quad (V)$$

حيث يكون الزمن بالميكروثانية .

ويعطى التيار فى المكثف بما يلى :

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 5e^{-t/10} \quad (A)$$

والتيار فى مقاومتي التوازي

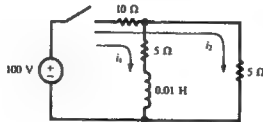
$$i_{10\Omega} = \frac{v_C}{10 \Omega} = 2.5(1 - e^{-t/10}) \quad (A)$$

$$i = i_C + i_{10\Omega} = 2.5(1 + e^{-t/10}) \quad (A)$$

ولذلك

ويمكن أيضاً حل المسألة بتحديد تيارات الشبكات وحل المعادلات التفاضلية الآتية .

7-18 أفضّل المفتاح عند  $t = 0$  فى الدائرة ذات الشبكتين المبينة شكل 7-32 . أوجد التيارين  $i_1$  ،  $i_2$  لقيم  $t > 0$  .



شكل 7-32

$$10(i_1 + i_2) + 5i_1 + 0.01 \frac{di_1}{dt} = 100 \quad (24)$$

$$10(i_1 + i_2) + 5i_2 = 100 \quad (25)$$

من المعادلة (25)  $i_2 = (100 - 10 i_1) / 15$  وبالتعويض في (24)،

$$\frac{di_1}{dt} + 833i_1 = 3333 \quad (26)$$

والحل للحالة المستقرة (الحل الخاص) للمعادلة (26) هو  $i_1(\infty) = 3333/833 = 4.0 \text{ A}$

$$i_1 = Ae^{-833t} + 4.0 \quad (\text{A})$$

وبتطبيق شروط الحالة الابتدائية  $i_2(0^+) = i_1(0^-) = 0$  نحصل حالياً  $A = -4.0 \text{ A}$  لذلك

$$i_1 = 4.0(1 - e^{-833t}) \quad (\text{A}) \quad \text{and} \quad i_2 = 4.0 + 2.67e^{-833t} \quad (\text{A})$$

طريقة أخرى :

عند رؤية باقى الدائرة من طرفى الملف تكون المقاومة المكافئة .

$$R_{eq} = 5 + \frac{5(10)}{15} = 8.33 \Omega$$

ولذلك  $1/\tau = R_{eq}/L = 833 \text{ s}^{-1}$  . عند  $t = \infty$  تكون مقاومة الدائرة :

$$R_T = 10 + \frac{5(5)}{10} = 12.5 \Omega$$

وبذلك يكون التيار الكلى  $i_T = 100/12.5 = 8 \text{ A}$  . عند  $t = \infty$  فإن التيار ينقسم بالتساوى بين

المقاومتين  $5 \Omega$  مؤدياً إلى تيار نهائى فى الملف قيمته  $4 \text{ A}$  وبالتالى :

$$i_L = i_1 = 4(1 - e^{-833t}) \quad (\text{A})$$

7-19 دائرة RL توالى بها  $R = 50 \Omega$  ،  $L = 0.2 \text{ H}$  متصلة بمجىبى

$$v = 150 \sin(500t + 0.785) \quad (\text{V})$$

تم توصيله عند  $t = 0$  . أوجد التيار لقيم  $t > 0$  .

معادلة الدائرة لقيم  $t > 0$  هي :

$$\frac{di}{dt} + 250i = 750 \sin(500t + 0.785) \quad (27)$$

وينقسم الحل إلى جزئين الدالة المكتملة ( $i_C$ ) والحل الخاص ( $i_p$ ) وبذلك  $i = i_C + i_p$  . والدالة المكتملة هي الحل العام للمعادلة (27) حينما يكون الطرف الأيمن صفراً وبذلك  $i_C = ke^{-250t}$  . وبافتراض ثوابت لتكملة حل  $i_p$  نفترض أن :

$$i_p = A \cos 500t + B \sin 500t$$

وحيث أن الطرف الأيمن للمعادلة (27) يمكن أيضاً التعبير عنه بمجموعة خطية من هاتين الدالتين لذلك :

$$\frac{di_p}{dt} = -500A \sin 500t + 500B \cos 500t$$

وبالتعويض لكل من  $i_p$  ،  $di_p/dt$  في المعادلة (27) وفك الطرف الأيمن فإن :

$$-500A \sin 500t + 500B \cos 500t + 250A \cos 500t + 250B \sin 500t = 530.3 \cos 500t + 530.3 \sin 500t$$

ومساوات معاملات الحدود المتشابهة فإن :

$$-500A + 250B = 530.3 \quad \text{and} \quad 500B + 250A = 530.3$$

وعند حل هذه المعادلات الآتية فإن  $A = -0.4243$  A ،  $B = 1.274$  A .

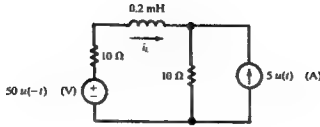
$$i_p = -0.4243 \cos 500t + 1.273 \sin 500t = 1.342 \sin(500t - 0.322) \quad (A)$$

$$\text{and} \quad i = i_C + i_p = ke^{-250t} + 1.342 \sin(500t - 0.322) \quad (A)$$

عند  $t = 0$  ،  $i = 0$  . وبتطبيق هذه الحالة لقيمة  $k = 0.425$  A فإنه في النهاية نحصل على

$$i = 0.425e^{-250t} + 1.342 \sin(500t - 0.322) \quad (A)$$

7-20 : أوجد التيار  $i_L$  للدائرة المبينة شكل 7-33 لجميع الأزمنة  $t$  .



شكل 7-33

لقيم  $t < 0$  فإن المنبع 50 V ينشأ عنه تيار فى الملف قيمته  $50/20 = 2.5$  A . وأيضاً فإن منبع التيار يستخدم لقيم  $t > 0$  . وحينما  $t \rightarrow \infty$  فإن هذا التيار ينقسم بالتساوى بين المقاومتين  $10 \Omega$  ولذلك  $i_L(\infty) = -2.5$  A ويكون ثابت الزمن للدائرة .

$$\tau = \frac{0.2 \times 10^{-3} \text{ H}}{20 \Omega} = \frac{1}{100} \text{ ms}$$

وذلك باعتبار  $t$  بالملى ثانية وباستخدام  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2.5$  A .

$$i_L = [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} + i_L(\infty) = 5.0e^{-100t} - 2.5 \quad (\text{A})$$

وأخيراً باستخدام دالة الوحدة السلمية لتجميع العلاقات لقيم  $t < 0$  ،  $t > 0$  فإن :

$$i_L = 2.5 u(-t) + (5.0e^{-100t} - 2.5) u(t) \quad (\text{A})$$

7-21 إذا كان المفتاح للدائرة شكل 7-34 فى الوضع 1 لمدة طويلة ثم تحرك للوضع 2 عند  $t = 0$  . فأوجد العلاقة للتيار  $i$  لقيم  $t > 0$  . عند الوضع 1 .

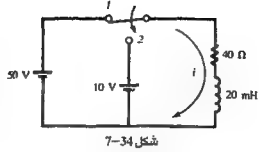
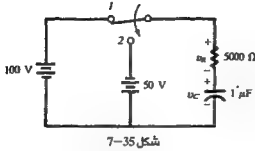
المفتاح  $i(0^-) = 50/40 = 1.25$  A . ومع وجود الملف فى الدائرة فإن  $i(0^+) = i(0^-)$  وبعد فترة طويلة عندما يتحرك المفتاح للوضع 2 فإن  $i(\infty) = 10/40 = 0.25$  A . وما سبق فإن :

$$B = i(\infty) = 0.25 \text{ A} \quad A = i(0^+) - B = 1.00 \text{ A}$$

ويكون ثابت الزمن  $\tau = L/R = (1/2000) \text{ s}$  . ومن ثم لقيم  $t > 0$  .

$$i = 1.00e^{-2000t} + 0.25 \quad (\text{A})$$





7-22 تحرك المفتاح في الدائرة المبينة شكل 7-35 من الوضع 1 إلى الوضع 2 عند  $t = 0$  توجد  $v_C$  ،  $v_R$  لقيم  $t > 0$  .

عندما يكون المفتاح في الوضع 1 ينشأ عن المنبع 100V أن تكون  $v_C(0^-) = 100$  V وباستمرارية الشحنة فإن  $v_C(0^+) = v_C(0^-)$  . وفي الوضع 2 مع المنبع 50V ذو القطبية المعكوسة فإن  $v_C(\infty) = -50$  V ، ولذلك :

$$B = v_C(\infty) = -50 \text{ V} \quad A = v_C(0^+) - B = 150 \text{ V}$$

$$\tau = RC = \frac{1}{200} \text{ s}$$

and

$$v_C = 150e^{-200t} - 50 \text{ (V)}$$

وأخيراً فإن KVL يعطى  $v_R + v_C + 50 = 0$  ومنها :

$$v_R = -150e^{-200t} \text{ (V)}$$

7-23 أوجد دوال الطاقة للدائرة الموجودة في المسألة 7-22 .

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 = 1.25(3e^{-200t} - 1)^2 \text{ (mJ)}$$

$$w_R = \int_0^t \frac{v_R^2}{R} dt = 11.25(1 - e^{-400t}) \text{ (mJ)}$$

7-24 دائرة توالى RC بها  $R = 5 \text{ k}\Omega$  ،  $C = 20 \mu\text{F}$  لها متبعين للجهد على التوالى .

$$v_1 = 25u(-t) \text{ (V)} \quad v_2 = 25u(t - t') \text{ (V)}$$

أوجد العلاقة الكاملة للجهد على طرفي المكثف وارسم علاقة الجهد إذا كانت  $t'$  موجبة .

جهد المكثف مستمر لقيم  $t \leq 0$  ويظهر على المكثف الجهد  $v_1$  و قيمته  $25\text{ V}$  . ولقيم  $0 \leq t \leq t'$  فإن كلا المتبعين يكون صفراً وبالتالي يتناقص  $v_C$  أسياً من القيمة  $25\text{ V}$  إلى الصفر .

$$v_C = 25e^{-t/RC} = 25e^{-10t} \quad (\text{V}) \quad (0 \leq t \leq t')$$

وبحالة خاصة فإن  $v_C(t') = 25e^{-10t'} (\text{V})$  .

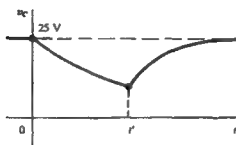
لقيم  $t \geq t'$  ،  $v_C$  تزداد من  $v_C(t')$  نحو قيمتها النهائية  $25\text{ V}$  المتكونة من  $v_2$  .

$$\begin{aligned} v_C &= [v_C(t') - v_C(\infty)]e^{-(t-t')/RC} + v_C(\infty) \\ &= 25[1 - (e^{10t'} - 1)e^{-10t}] \quad (\text{V}) \quad (t \geq t') \end{aligned}$$

وبذلك لجميع قيم  $t$  .

$$v_C = 25u(-t) + 25e^{-10t}[u(t) - u(t - t')] + 25[1 - (e^{10t'} - 1)e^{-10t}]u(t - t') \quad (\text{V})$$

انظر شكل 7-36.

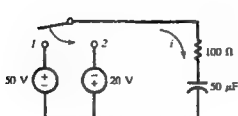


شكل 7-36

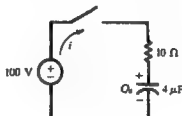
## مسائل إضافية

7-25 المكثف في الدائرة شكل 7-37 له شحنة ابتدائية  $Q_0 = 800 \mu C$  وقطبية كما هو مبين. إذا أقفل المفتاح عند  $t = 0$  فأوجد التيار والشحنة لقيم  $t > 0$ .

الجواب:  $q = 4 \times 10^{-4} (1 + e^{-25000t}) (C)$  ،  $i = -10e^{-25000t} (A)$



شكل 7-38



شكل 7-37

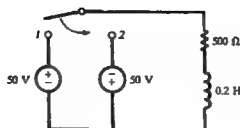
7-26 وصل مكثف  $2\mu F$  عليه شحنة ابتدائية  $Q_0 = 100 \mu C$  على طرفي مقاومة  $100 \Omega$  عند  $t = 0$  أحسب الزمن الذي ينخفض فيه الجهد العابر على طرفي المقاومة من 40 إلى 10 V. الجواب: 0.277 ms.

7-27 في دائرة RC المبينة شكل 7-38 أقفل المفتاح عند الوضع 1 عند  $t = 0$  ثم تحرك إلى الوضع 2 بعد مرور ثابت زمني واحد. أوجد التيار العابر عندما (أ)  $0 < t < \tau$  ، (ب)  $t = \tau$  . الجواب (أ)  $0.5e^{-200t}$  ، (ب)  $-0.516e^{-200(t-\tau)}$  (A).

7-28 وصل مكثف  $10 \mu F$  له شحنة ابتدائية  $Q_0$  على طرفي مقاومة عند  $t = 0$  . وإذا علم أن القدرة العابرة للمكثف هي  $800e^{-4000t-7} (W)$  . أوجد R ،  $Q_0$  والطاقة الابتدائية المخزنة في المكثف. الجواب:  $50 \Omega$  ،  $2000 \mu C$  ، 0.20 J.

7-29 دائرة RL توالي ،  $R = 10 \Omega$  ،  $L = 1 H$  متصلة بمنبع 100 v عند  $t = 0$  . أوجد التيار لقيم  $t > 0$  . الجواب:  $10(1 - e^{-10t}) A$ .

7-30 إذا أقفل المفتاح عند الوضع 1 عند  $t = 0$  في شكل 7-39 ثم تحرك إلى الوضع 2 عند  $t = 1 ms$  . أوجد الزمن الذي يكون عنده الجهد على طرف المقاومة صفرًا بعكس القطبية. الجواب: 1.261 ms.



شكل 7-39

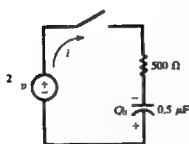
7-31 دائرة نوالى  $RL$  بها  $L = 0.2 \text{ H}$ ،  $R = 100 \Omega$  وصلت بمنبع  $100\text{V}$  عند  $t = 0$  ثم وصل منبع آخر  $50\text{V}$  له نفس القطبية عند  $t = t'$  بدل المنبع الأول. أوجد  $t'$  بحيث يكون التيار ثابتاً بالقيمة  $0.2 \text{ A}$  لقيم  $t' > t$ . الجواب:  $1.39 \text{ ms}$ .

7-32 وصل منبع  $50 \text{ V}$  بقطبيه معكوسة للدائرة فى المسألة 7-31 عند  $t = 0.50 \text{ ms}$  بدلاً من المنبع الأول. أوجد التيار لقيم (أ)  $0 < t < 0.50 \text{ ms}$ . (ب)  $t > 0.50 \text{ ms}$ . الجواب: (أ)  $1 - e^{-500t} \text{ (A)}$ ، (ب)  $0.50 - 0.781e^{-500(t-0.0005)} \text{ (A)}$ .

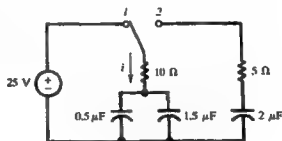
7-33 جهد عابر  $35e^{-500t}$  له القيمة  $25 \text{ V}$  عند  $t_1 = 6.73 \times 10^{-4} \text{ s}$ . بين أنه عند  $t = t_1 + \tau$  فإن الدالة تكون لها القيمة  $36.8\%$  من قيمتها عند  $t_1$ .

7-34 قيمة عابرة تزداد من الصفر إلى قيمة مستقرة ثابتة  $49.5$  عند  $t_1 = 5.0 \text{ ms}$ ،  $120$  عند  $t_2 = 20.0 \text{ ms}$ . أوجد ثابت الزمن  $\tau$ . الجواب:  $12.4 \text{ ms}$ .

7-35 الدائرة المبينة شكل 7-40 وصلت إلى الوضع 1 عند  $t = 0$  ثم الوضع 2 عند  $t = 3\tau$  أوجد التيار العابر  $i$  لقيم (أ)  $0 < t < 3\tau$ ، (ب)  $t > 3\tau$ . الجواب: (أ)  $2.5e^{-50000t} \text{ (A)}$ ، (ب)  $-1.58e^{-66700(t-0.00006)} \text{ (A)}$ .



شكل 7-41



شكل 7-40

7-36 دائرة RL بها  $L = 1 \text{ H}$  ،  $R = 300 \Omega$  متصلة بجهد  $v = 100 \cos(100t + 45^\circ) \text{ (V)}$  عن طريق قفل المفتاح عند  $t = 0$  يمكن اعتبار زاوية وجه مناسبة للجهد  $v$  ويمكن بيانها بالقيمة  $t = 100t + (\pi/4) \text{ (rad)}$  أوجد التيار الناتج عند  $t = 0$ .

الجواب :  $(A) : -0.282e^{-300t} + 0.316 \cos(100t + 2.6.6^\circ)$

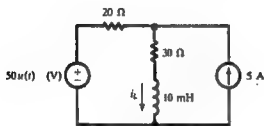
7-37 دائرة RC مبنية شكل 7-41 عليها شحنة ابتدائية  $Q_0 = 25 \mu\text{C}$  بالإشارات المبنية . أقفل المفتاح عند  $t = 0$  بتوصيل الجهد  $v = 100 \sin(100t + 30^\circ) \text{ (V)}$  . أوجد التيار لقيم  $t > 0$ .

الجواب :  $(\text{mA}) : 153.5e^{-4000t} + 48.4 \sin(1000t + 106^\circ)$

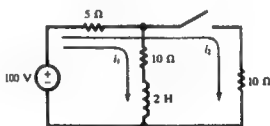
7-38 ما هي الشحنة الابتدائية على المكثف شكل 7-37 التي تجعل التيار ذو قيمة مستمرة مباشرة بدون فترة عابرة . الجواب :  $(+)\text{على اللوح الأعلى} 13.37 \mu\text{C}$ .

7-39 أكتب المعادلات التفاضلية الآتية للدائرة المبنية شكل 7-42 وحلها لإيجاد قيم  $i_1$  ،  $i_2$  . أقفل المفتاح عند  $t = 0$  بعد أن كان مفتوحاً لفترة زمنية طويلة (يمكن أيضاً حل المسألة باستخدام قيم ابتدائية ونهائية معروفة في الحل العام كما في المسألة 7-17).

الجواب :  $(A) : i_1 = 1.67e^{6.67t} + 5$  ،  $i_2 = -0.555e^{-6.67t} + 5$



شكل 7-43



شكل 7-42

7-40 لدائرة RL المبنية شكل 7-43 أوجد التيار  $i_L$  في الأزمنة التالية (أ)  $-1 \text{ ms}$  ، (ب)  $0^+$  ، (ج)  $0.3 \text{ ms}$  ، (د)  $\infty$  .

الجواب : (أ)  $2.00 \text{ A}$  ، (ب)  $2.00 \text{ A}$  ، (ج)  $2.78 \text{ A}$  ، (د)  $3.00 \text{ A}$

7-41 دائرة توالى RC بها  $R = 2 \text{ k}\Omega$  ،  $C = 40 \mu\text{F}$  لها منبعين للجهد على التوالى مع بعضهما  
 $v_1 = 50 \text{ V}$  ،  $v_2 = -100 \mu(t)$  . أوجد (أ) جهد المكثف عند  $t = \tau$  ، (ب) الزمن الذى يكون  
 عنده جهد المكثف صفراً ويعكس الإشارة. الجواب: (أ)  $-13.2 \text{ V}$  ، (ب)  $55.5 \text{ ms}$  .

## الفصل الثامن

### دوائر فوق الدرجة الأولى والترددات المركبة

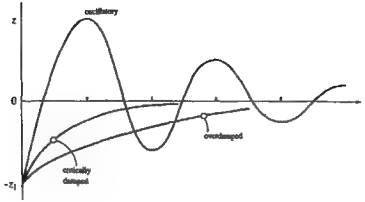
#### 8.1 مقدمة

فى الفصل السابع تم اختيار دوائر  $RL$ ،  $RC$  بتيارات ابتدائية أو شحنة على المكثف وتم حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى للحصول على الجهود والتيارات العابرة. وحينما تحتوى الدائرة على عنصرين أو أكثر من العناصر التى تخزن الطاقة فإن معادلات الشبكة ستكون تفاضلية من الرتبة الثانية. ويقدم هذا الفصل العديد من الأمثلة للدوائر ستكون تفاضلية من الرتبة الثانية. وسنوالى ذلك بتحليلها بطرق مباشرة متضمنة الترددات المركبة ورسومات للقطب/ الصفر.

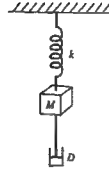
#### 8-2 دائرة التوالى RLC

الدائرة التفاضلية ذات الرتبة الثانية التى ستبحث حالياً لها حل يمكن أن يأخذ صور مختلفة كل منها يعتمد على عناصر الدائرة. ولتوضيح الاحتمالات الثلاثية يمكن اعتبار النظام الميكانيكى ذو الرتبة الثانية المبينة شكل 8-1. الكتلة  $M$  معلقة باليأى ذو الثابت  $k$ . ومتصل أيضاً بالكتلة  $M$  بسيطة لخمء الحركة  $D$ . وإذا تحركت الكتلة من وضع السكون ثم تركت حرة الحركة عند  $t = 0$  فإن حركتها ستكون ذو خمء زائد أو خمء خرج أو خمء ناقص (متذبذب).

شكل 8-2 يبين رسم الحركات الناتجة للكتلة بعد تركها حرة الحركة من الوضع ذو الإزاحة  $z_1$  (عند  $t = 0$ ).



شكل 8-2



شكل 8-1

دائرة التوالي RLC المبينة شكل 8-3 لا تحتوي على منبع جهد . وبذلك يكون قانون كيرشوف للجهد للحلقة المغلقة بعد قفل المفتاح هو :

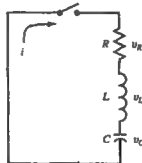
$$v_R + v_L + v_C = 0$$

$$R_i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

ويأجرأ التفاضل والقسمة على  $L$  فنؤول إلى :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

والحل لهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية بأخذ الصورة  $i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$



شكل 8-3



وبالتعويض بهذا الحل فى المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$A_1 e^{s_1 t} \left( s_1^2 + \frac{R}{L} s_1 + \frac{1}{LC} \right) + A_2 e^{s_2 t} \left( s_2^2 + \frac{R}{L} s_2 + \frac{1}{LC} \right) = 0$$

إى أن  $S_1$  ،  $S_2$  هما جذرى المعادلة  $S^2 + (R/L)S + (1/LC) = 0$

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha + \beta \quad s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha - \beta$$

حيث  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  ،  $\beta = \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$  ،  $\alpha = R/2L$

حالة الخمد الزائد ( $\alpha > \omega_0$ ) :

فى هذه الحالة يكون كلاً من  $\alpha$  ،  $\beta$  أعداد حقيقية موجبة .

$$i = A_1 e^{(-\alpha + \beta)t} + A_2 e^{(-\alpha - \beta)t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$$

**مثال 8-1 :** دائرة توالى RLC بها  $R = 200 \Omega$  ،  $L = 0.10 \text{ H}$  ،  $C = 13.33 \mu\text{F}$  ويحمل المكثف

شحنة ابتدائية  $Q_0 = 2.67 \times 10^{-3} \text{ C}$  . اقفل المفتاح عند  $t = 0$  ليقيم المكثف بتفريغ

شحنته . أوجد التيار العابر . (انظر شكل 8-4) .

لهذه الدائرة .

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 10^3 \text{ s}^{-1} , \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 7.5 \times 10^3 \text{ s}^{-2} , \quad \text{and} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 500 \text{ s}^{-1}$$

Then,

$$i = e^{-1000t} (A_1 e^{500t} + A_2 e^{-500t})$$

الاثباتان  $A_1$  ،  $A_2$  نحصل عليهما من الحالات الابتدائية . ويتطلب الملف أن تكون  $i(0^+) = i(0^-)$

وكذلك تكون الشحنة والجهد على المكثف عند  $t = 0^+$  بنفس القيم عند  $t = 0^-$

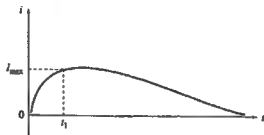
وأيضاً  $v_C(0^-) = Q_0/C = 200 \text{ V}$  . وباستخدام هاتين الحالتين .

$$0 = A_1 + A_2 \quad \text{and} \quad \pm 2000 = -500A_1 - 1500A_2$$

ومنها  $A_1 = \pm 2$  ،  $A_2 = \mp 2$  وباعتبار  $A_1$  موجبة .

$$i = 2e^{-500t} - 2e^{-1500t} \quad (\text{A})$$

وإذا أخذنا القيمة السالبة للمقدار  $A_1$  فإن الدالة مستضغطة قليلاً لأسفل ولكنها بنفس الشكل .  
وتحدد إشارات  $A_1$  ،  $A_2$  بإشارات الجهد الابتدائي على المكثف وعلاقته بالإتجاه الموجب المفترض للتيار .



شكل 8-4

### حالة المخمد الحرج : $(\alpha = \omega_0)$ :

باعتبار  $\alpha = \omega_0$  فإن المعادلة التفاضلية تأخذ شكلاً مختلفاً من الدالتين الأسيتين السابقتين وهما لا يؤديان للحل . وحيث تصبح المعادلة .

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

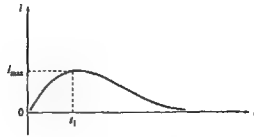
ويكون الحل في صورة  $i = e^{-\alpha t} (A_1 + A_2 t)$  .

مثال 8-2 : أعد حل مثال 8-1 لقيم  $C = 10 \mu F$  وحيث ينتج  $\alpha = \omega_0$  .

كما في مثال 8-1 نستخدم الحالات الابتدائية لتحديد الثوابت وحيث أن  $i(0^-) = i(0^+)$  ،  $0 = [A_1 + A_2(0)]$  فإن :

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} (A_2 t e^{-\alpha t}) = A_2 (-\alpha t e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

ومنها  $A_2 = (di/dt)_{t=0} = \pm 2000$  ولذلك  $A_2 = \pm 2000 e^{-10^3 t}$  (A) . (انظر شكل 8-5) . ومرة أخرى فإن القطبية (الإشارة) هي مسألة تتعلق بإتجاه التيار بالنسبة لقطبية الجهد الابتدائي على المكثف .



شكل 8-5

الاستجابة لكل من الخمد الزائد والخمد الحرج متشابهة كما في شكل 8-4 ، 8-5 على التوالي . وعلى الفارئ أن يختبر النتائج باختيار قيم متعددة للزمن  $t$  ومقارنة التيارات . وعلى سبيل المثال : أوجد الزمن الذي يصل عنده التيار في كلا الحالتين للقيمة  $1 \text{ mA}$  ،  $1 \mu\text{A}$  . وأيضاً أوجد في كل حالة الزمن  $t_1$  للقيم العظمى للتيارات .

### الخمد الناقص أو حالة التذبذب ( $\alpha < \omega_0$ ) :

حينما تكون  $\alpha < \omega_0$  ،  $S_2$  و  $S_1$  في حل المعادلة التفاضلية المقترحة فيما سبق هي قيم مركبة مترافقة  $S_2 = \alpha - j\beta$  ،  $S_1 = \alpha + j\beta$  بالقيمة  $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  ويكتب الحل بالصورة الأسية كما يلي :

$$i = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\beta t} + A_2 e^{-j\beta t})$$

ويكون بالصورة الجيبية هو :

$$i = e^{-\alpha t} (A_3 \cos \beta t + A_4 \sin \beta t)$$

**مثال 8-3 :** أعد حل مثال 8-1 بحيث يكون  $C = 1 \mu\text{F}$  .

كما سبق

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 1000 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^7 \text{ s}^{-2} \quad \beta = \sqrt{10^7 - 10^6} = 3000 \text{ rad/s}$$

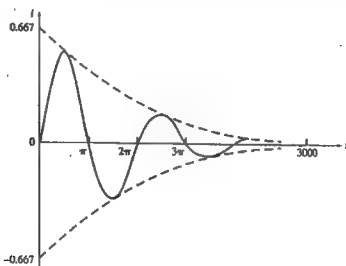
Then,

$$i = e^{-1000t} (A_3 \cos 3000t + A_4 \sin 3000t)$$

يمكن الحصول على الثابتين  $A_3$  ،  $A_4$  من الحالات الابتدائية كما سبق ،  $i(0^+) = 0$  ،  
 $V_C(0^+) = 200 \text{ V}$  ومنها  $A_3 = 0$  ،  $A_4 = \pm 0.667$  لذلك :

$$i = \pm 0.667 e^{-1000t} (\sin 3000t) \text{ (A)}$$

انظر شكل 8-6 الدالة  $\pm 0.667 e^{-1000t}$  المبينة بالمنحنى المنقوط ترسم الغلاف الذى بداخله تحقق الدالة الجيبية . وتردد التيار المتذبذب بالتقدير الدائرى هو  $-\beta$  (rad/s) ، ولكنه يخمد بواسطة الحد الأسى  $e^{-\alpha t}$ .



شكل 8-6

### 8-3 دارة التوازي RLC

استجابة دائرة التوازي RLC المبينة شكل 8-7 ستكون مشابهة لدائرة التوالي RLC حيث تنوقع المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية . وتعطى طريقة جهد العقدة .

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v \, dt + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1)$$

بإجراء التفاضل والقسم على C نحصل على :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

ويكون الحل في الصورة :

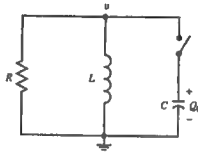
$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (2)$$

حيث

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

حيث  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  ،  $\alpha = 1/2 RC$  . يلاحظ أن  $\alpha$  (معامل الخمد) للقيمة العابرة تختلف عن  $\alpha$  في دائرة التوالي RLC .



شكل 8-7

من الأسهل تحقيق الاستجابة العابرة بافتراض قيمة ابتدائية للشحنة  $Q_0$  على المكثف وقفل المفتاح عند  $t = 0$  . ومع هذا فإنه باستخدام دالة جهد سلمية للدائرة سينشأ عنه نفس الاستجابة العابرة .

حالة الخمد الزائد ( $\alpha^2 > \omega_0^2$ ) :

هنا نستخدم الحل (2) .

مثال 8-4 : دائرة توازي RLC لها  $R = 1000 \Omega$  ،  $C = 0.167 \mu F$  ،  $L = 1.0 H$  . لها جهد

ابتدائي  $V_0 = 50.0 V$  على المكثف . أوجد الجهد  $v(t)$  حينما يقفل المفتاح عند  $t = 0$  .

لدينا :

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2994 \quad \alpha^2 = 8.96 \times 10^6 \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 5.99 \times 10^6$$

حيث تكون  $\alpha^2 > \omega_0^2$  فإن الدائرة تكون ذات خمد زائد ومن (2) نحصل على :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1271 \quad \text{و} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -4717$$

$$V_0 = A_1 + A_2 \quad \text{و} \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = s_1 A_1 + s_2 A_2 \quad \text{عند } t = 0$$

من معادلة العقدة (1)، وعند  $t = 0$  ومع عدم وجود أى تيار ابتدائى فى الملف L.

$$\frac{V_0}{R} + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{V_0}{RC}$$

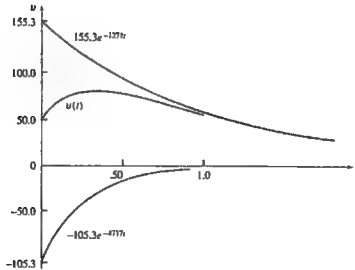
وبالحل لقيم  $A_1$

$$A_1 = \frac{V_0(s_2 + 1/RC)}{s_2 - s_1} = 155.3 \quad \text{and} \quad A_2 = V_0 - A_1 = 50.0 - 155.3 = -105.3$$

وبالتعويض فى (2)

$$v = 155.3e^{-1271t} - 105.3e^{-4717t} \quad (\text{V})$$

انظر شكل 8-8



شكل 8-8

### حالة الخمد الناقص : (المتذبذب) حالة ( $\omega_0^2 > \alpha^2$ ):

ينشأ عن الحالة المتذبذبة لدائرة التوازي RLC معادلة لها نفس صورة معادلة الخمد لدائرة RLC التوالى .

$$v = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad (3)$$

حيث  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  ،  $\alpha = 1/2 RC$  ، وهى التردد الدائرى تماماً كما كانت فى حالة تحليل الدائرة الجيبية . وهنا تعطى تردد تذبذب الخمد ويرمز لها بأنها التردد الدائرى للخمد .

مثال 8-5 :

دائرة توازي RLC بها  $R = 200 \Omega$  ،  $L = 0.28 \text{ H}$  ،  $C = 3.57 \mu\text{F}$  . لها جهد ابتدائى  $V_0 = 50.0$  على المكثف . أوجد دالة الجهد حينما يقفل المفتاح عند  $t = 0$  .

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(200)(3.57 \times 10^{-6})} = 700 \quad \alpha^2 = 4.9 \times 10^5 \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{(0.28)(3.57 \times 10^{-6})} = 10^6$$

حيث أن  $\omega_0^2 > \alpha^2$  فإنه ينتج عن معاملات الدائرة استجابة متذبذبة .

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^6 - (4.9 \times 10^5)} = 714$$

عند  $t = 0$  ،  $V_0 = 50.0 \text{ V}$  وبذلك فى المعادلة (3)  $A_1 = V_0 = 50.0$  . ومن معادلة العقدة

$$\frac{V_0}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v \, dt + C \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\text{at } t = 0, \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{V_0}{RC}$$

ويتفاضل معادلة  $v$  ووضع  $t = 0$  ينتج .

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \omega_d A_2 - \alpha A_1 \quad \text{or} \quad \omega_d A_2 - \alpha A_1 = -\frac{V_0}{RC}$$

وحيث أن  $V_0 = 50.0$  .

$$A_2 = \frac{-(V_0/RC) + V_0 \alpha}{\omega_d} = -49.0$$

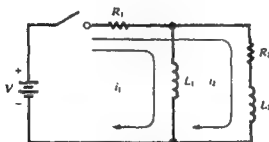
$$v = e^{-700t}(50.0 \cos 714t - 49.0 \sin 714t) \quad (\text{V})$$

وبذلك

لن تناقش حالة الخمد الحرج لدائرة التوازي RLC حيث أنها نادرة الوجود في تصميم الدوائر. ويدافع الفضول لمعرفة ما يحدث فهي مجموعة من ثوابت الدائرة تكون استجابتها عند خمدتها على شفا التذبذب.

#### 8-4 الدائرة ذات الشبكتين :

تحليل استجابة الدائرة ذات الشبكتين المحتوية على عنصرين لتخزين الطاقة ينشأ عنها معادلة تفاضلية أنية كما هو مبين فيما يلي :



شكل 8-9

للدائرة المبينة شكل 8-9 اختار تيارى شبكتات  $i_1$  ،  $i_2$  كما هو مبين . وباستخدام KVL نحصل على معادلتين تفاضليتين من الدرجة الأولى .

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 = V$$

$$R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = V$$

التي نحل أنياً . ولأداء ذلك أوجد التفاضل بالنسبة للزمن للمعادلة (4) .

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (6)$$

ثم أحذف  $i_2$  ،  $di_2/dt$  بين المعادلات (4) ، (5) ، (6) ويتبع عن ذلك معادلة من الدرجة الثانية في  $i_1$  من النوع الذى سبق التعامل معه فى بند 8-2 ، 8-3 فيما عد الحد الثابت على اليمين .

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} i_1 = \frac{R_2 V}{L_1 L_2} \quad (7)$$



الحل المستقر للمعادلة (7) يكون من الواضح  $i_1(\infty) = \frac{V}{R_1}$  ، والحل العابر نصل إليه بالجنرين  $S_2$  ،  $S_1$  للمعادلة .

$$s^2 + \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} s + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} = 0$$

وباعتبار الحالات الابتدائية .

$$i_1(0^+) = 0 \quad \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{0^+} = \frac{V}{L_1}$$

(كلا  $i_1$  ،  $i_2$  يجب أن يكونا مستمرين عند  $t = 0$ ) وبمجرد معرفة العلاقة للتيار  $i_1$  فإنه يتبع ذلك معرفة  $i_2$  من المعادلة (4) .

وسيكون هناك معامل خمد الذي يؤكد أن القيمة العابرة ستتلاشى كليةً . وأيضاً بالرجوع لقيم الثوابت الأربعة في الدائرة فإن القيمة العابرة يمكن أن تكون ذات خمد زائد أو خمد ناقص . والتي تكون متذبذبة . وبصورة عامة فإن علاقة التيار ستكون .

$$i_1 = (\text{transient}) + \frac{V}{R_1}$$

الجزء العابر ستكون قيمته  $-V/R_1$  عند  $t = 0$  والقيمة صفراً عند  $t \rightarrow \infty$

## 8-5 التردد المركب

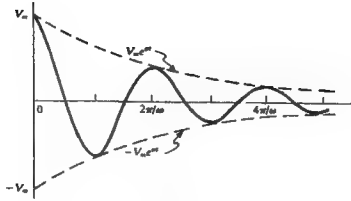
اختبرنا الدوائر التي يكون فيها الدالة الدافعة (المنبع) له قيمة ثابتة مثل  $V = 50.0$  أو دالة جيبية مثل  $V = 100.0 \sin(500t + 30^\circ)$  أو دالة أسية مثل  $V = 10e^{-at}$  ، وفي هذا الجزء ستعرض لتردد مركب  $s$  والذي يشمل الثلاث دوال وسنبسط التحليل فيما إذا كان المطلوب الاستجابة العابرة أو المستقرة .

وسنبداً بالتعبير عن الدالة الأسية بأدلة جيب التمام والجيب المكافئة .

$$e^{j(\omega t + \phi)} = \cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)$$

وسنركز بشيء من التوضيح على حد جيب التمام  $\cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} e^{j(\omega t + \phi)}$  وسنكتفى بإسقاط الرمز الدال على القيمة الحقيقية  $\operatorname{Re}$  واستخدام الثابت  $A$  والمعامل  $e^{at}$  .

$$A e^{at} e^{j(\omega t + \phi)} = A e^{at} \cos(\omega t + \phi) \quad A e^{j\phi} e^{(a+j\omega)t} = A e^{j\phi} e^{st} \quad \text{where } s = a + j\omega$$



شكل 8-10

والتردد المركب  $s = \delta + j\omega$  له الوحدات  $S^{-1}$  ،  $\omega$  كما نعلم لها الوحدات  $rad/s$  . وبالتالي تكون الوحدات الخاصة بالقيمة  $\delta$  يجب أن تكون أيضاً  $S^{-1}$  . وهذا هو التردد النسيبي بوحدات  $1/s$  . وإذا كان  $\omega$  كلاً من  $\sigma$  ، ليس صفراً فإن الدالة تكون دالة جيب تمام المخمودة وسنأخذ في الاعتبار قيم  $\delta$  السالبة فقط . وإذا كان  $\omega$  كلاً من  $\sigma$  ،  $\omega$  صفراً فإن الناتج يكون قيمة ثابتة . وأخيراً عند  $\omega = 0$  ،  $\sigma \neq 0$  فإن الناتج يكون دالة أسية متناقصة . ومبين في جدول 8-1 دوال متعددة للعلاقة  $Ae^{st}$  لقيم  $s$  المناظرة .

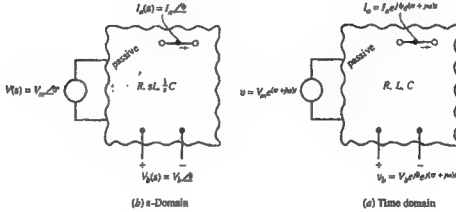
### جدول 8-1

$f(t)$	$s$	$A$
$10e^{-3t}$	$-5 + j0$	10
$5 \cos(500t + 30^\circ)$	$0 + j500$	5
$2e^{-3t} \cos(100t - 45^\circ)$	$-3 + j100$	2
100.0	$0 + j0$	100.0

وعند اختيار شكل 8-10 لقيم مختلفة للمتغير  $s$  فإننا نتوقع الثلاث حالات وهي : عند  $\sigma = 0$  فإنه لا يوجد خمد والناتج هو دالة جيب تمام بقيمة عظمى  $\pm V_m$  (ليست مبنية) وعند  $\omega = 0$  فإن الدالة تكون أسية ومتناقصة بقيمة ابتدائية  $V_m$  . وأخيراً حينما يكون  $\omega$  كلاً من  $\sigma$  ، ليس صفراً فإن الناتج يكون دالة خمد لجيب التمام .

## 8-6 / المعاوقة العامة (R, L, C) في مجال s

إذا وصلنا جهد منبع له القيمة  $v = V_m e^{st}$  لشبكة غير فعالة فإنه سيمر في أفرعها تياراً وسيكون هناك جهد على طرفي كل عنصر وجميعها لها نفس أساس المقارنة الزمنى  $e^{st}$ . فمثلاً  $I_m e^{st}$  ،  $V_m e^{st}$  وبالتالي فإن قيم التيارات والجهود وزوايا الوجه هي التي نحتاج لمعرفة (وهذه ستكون أيضاً الحالة في تحليل الدوائر الجيبية التي في الفصل التاسع). وهذا يقودنا إلى اعتبار الدائرة في مجال s (انظر شكل 8-11).



شكل 8-11

دائرة توالى RL عليها الجهد  $v = V_m e^{st}$  ينشأ عنها التيار  $i = I_m e^{st}$  وبالتعميـض في معادلة العقدة .

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_m e^{st}$$

والتي ينتج عنها :

$$RI_m e^{st} + sLI_m e^{st} = V_m e^{st} \quad \text{from which} \quad I_m = \frac{V_m e^{st}}{R + sL}$$

لاحظ أن تمثيل معاوقة التوالى RL في مجال s هو  $R + sL$ . وبذلك تكون الممانعة في مجال معاوقة s هي  $sL$ .

مثال 8-6 : دائرة توالى RL لها  $R = 4 \Omega$  ،  $L = 2 \text{ H}$  وجهد المنبع  $v = 10 e^{st} \cos(10t + 30^\circ)$ .

أوجد التيار  $i$  بطريقة تحليل مجال s.

$$v = 10 \angle 30^\circ e^{st} = Ri + L \frac{di}{dt} = 4i + 2 \frac{di}{dt}$$

وحيث أن  $i = Ie^{st}$  :

$$10/30^\circ e^{st} = 10Ie^{st} + 2sIe^{st} \quad \text{or} \quad I = \frac{10/30^\circ}{10 + 2s}$$

وبالتعويض  $s = -2 + j10$  :

$$I = \frac{10/30^\circ}{10 + 2(-2 + j10)} = \frac{10/30^\circ}{6 + j10} = 0.86 \angle -29.0^\circ$$

Then,  $i = Ie^{st} = 0.86e^{-2t} \cos(10t - 29.0^\circ)$  (A).

**مثال 8-7 :** دائرة توالى RC بها  $R = 10 \Omega$  ،  $C = 0.2 F$  ، عليها نفس الجهد كما فى المثال 8-6 .  
أوجد التيار بالتحليل فى مجال s .

كما فى مثال 8-6 .

$$v = 10/30^\circ e^{st} = RI + \frac{1}{C} \int I dt = 10I + 5 \int I dt$$

وحيث أن  $i = Ie^{st}$

$$10/30^\circ e^{st} = 10Ie^{st} + \frac{5}{s} Ie^{st} \quad \text{from which} \quad I = \frac{10/30^\circ}{10 + 5/s} = 1.0 \angle 32.8^\circ$$

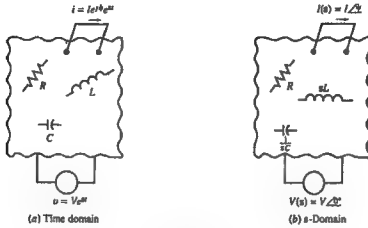
لاحظ أن المعاوقة للمكثف فى مجال s هى  $1/sC$  وبالتالى فإن معاوقة دائرة التوالى RLC فى مجال s ستكون  $Z(s) = R + sL + 1/sC$  .

## 8-7 دالة الشبكة ورسومات قطب/صفر

عند تطبيق جهد متبع له القيمة  $Ve^{st} = v$  لشبكة غير فعالة فإنه ستنشأ تيارات وجهود فى أجزاء الشبكة المختلفة كلا منها له نفس أساس المقارنة الزمنى وهو  $e^{st}$  كمثال  $Ie^{st}$  و  $Ve^{st}$  . ولذلك فإننا نحتاج فقط لمعرفة قيم التيار  $I$  وزاوية الوجه  $\psi$  . وبالتالى نصل إلى اعتبار أنه فى مجال s فإننا نمثل كلا من الجهود والتيارات بالصورة القطبية فمثلاً  $V \angle \theta$  ،  $I \angle \psi$  . وهكذا . شكل 8-12 يقترح التناظر بين الشبكة فى مجال الزمن حيث  $s = \sigma + j\omega$  وفى مجال s حيث توجد فقط القيمة المطلقة وزوايا

الوجه . ونعبر في مجال s لممانعة الملف بالقيمة SL، والمكثف بالقيمة 1/sC . والمعاوقة في مجال s هي

$$z(s) = V(s) / I(s)$$



شكل 8-12

نعرف دالة الشبكة  $H(s)$  بالنسبة بين القيم المركبة لخرج أسمى  $Y(s)$  إلى القيمة المركبة للدخل أسمى  $X(s)$ . وكمثال إذا كان  $X(s)$  هو جهد منبع،  $Y(s)$  هو جهد الخرج فإن النسبة  $Y(s) / V(s)$  تكون بدون وحدات.

ودالة الشبكة  $H(s)$  يمكن استنتاجها من معادلة الدخل / الخرج التفاضلية.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

حيث  $y(s) = Y e^{st}$ ،  $x(t) = X e^{st}$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) e^{st} = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) e^{st}$$

ومن ثم،

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

في الدوائر الخطية المكونة من مجموعة عناصر تكون دالة الشبكة  $H(s)$  دالة جذرية لقيم s ويمكن

كتابتها بالصورة العامة التالية:

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_m)}$$

حيث  $k$  هو رقم صحيح والثوابت المركبة ( $m = 1, 2, \dots, \mu$ ) ،  $z_m$  القيم الصغرية للدالة  $H(s)$  و  $p_n$  ( $n = 1, 2, \dots, \nu$ ) القيم القطبية للدالة  $H(s)$ ، ويجب ملاحظة حالات  $H(s)$  الغير متصلة وبالتالي فإنه عند  $s = z_m$  فإن الاستجابة تساوى صفراً بغض النظر عن كبر قيمة الإثارة. وحيث  $s = p_n$  فإن الاستجابة ستكون ما لا نهاية بغض النظر عن صغر قيمة الإثارة.

**مثال 8-5:** في الدائرة الغير فعالة في مجال  $s$  المبينة شكل 8-13. أوجد دالة الشبكة للتيار  $I(s)$  الناتج

عن جهد دخل  $V(s)$ .

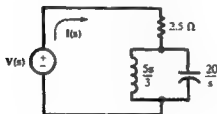
$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)}$$

Since

$$Z(s) = 2.5 + \frac{\left(\frac{5s}{3}\right)\left(\frac{20}{s}\right)}{\frac{5s}{3} + \frac{20}{s}} = (2.5) \frac{s^2 + 8s + 12}{s^2 + 12}$$

we have

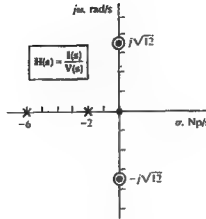
$$H(s) = (0.4) \frac{s^2 + 12}{(s + 2)(s + 6)}$$



شكل 8-13

المقام للدالة  $H(s)$  في مثال 8-8 يكون صفراً عندما  $s = \pm j\sqrt{12}$ . وبالتالي فإن دالة الجهد عند هذا التردد ينتج عنها تياراً قيمته صفراً. في فصل 12 حيث نناقش دائرة الرنين التوالى والتوازي سنجد أن دائرة التوازي LC تكون ذات رنين عند  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  ومع  $L = (5/3) H$  ،  $C = (1/20) F$  ،  $\omega = \sqrt{12} \text{ rad/s}$ .

يمكن رسم أصفار أقطاب دالة الشبكة  $H(s)$  في المستوى  $s$  المركب. وشكل 8-14 يبين أقطاب وأصفار الدالة لمثال 8-8 بأن تأخذ الأصفار العلامة @ وتأخذ الأقطاب العلامة x وتحديث الأصفار على شكل أزواج مترافقة  $\pm j\sqrt{12}$  والأقطاب هي  $s = -2$  ،  $s = -6$ .



شكل 8-14

## 8-8 الاستجابة القسرية

يمكن التعبير عن دالة الشبكة بالصورة القطبية والحصول على الاستجابة بالرسم . وقبل البدء في تطوير ذلك فإنه من المفيد أن نسترجع أن  $H(s)$  هي مجرد نسبة مثل  $V_0(s)/V_i(s)$  ،  $I_2(s)/V_1(s)$  ،  $I_2(s)/I_1(s)$  . ومع متعدد الحدود نجد أن :

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_\mu)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_\nu)}$$

Now setting  $(s - z_m) = N_m / \alpha_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \mu$ ) and  $(s - p_n) = D_n / \beta_n$  ( $n = 1, 2, \dots, \nu$ ), we have

$$H(s) = k \frac{(N_1 / \alpha_1)(N_2 / \alpha_2) \cdots (N_\mu / \alpha_\mu)}{(D_1 / \beta_1)(D_2 / \beta_2) \cdots (D_\nu / \beta_\nu)} = k \frac{N_1 N_2 \cdots N_\mu}{D_1 D_2 \cdots D_\nu} \frac{(\beta_1 + \cdots + \beta_\mu) - (\beta_1 + \cdots + \beta_\nu)}{(\beta_1 + \cdots + \beta_\nu)}$$

وبالتالى فإن استجابة الشبكة لإثارة لها  $S = \sigma + j\omega$  تحدد بقياس أطوال المتجهات من الأصفار والأقطاب إلى  $s$  وأيضاً بالزاويا التى تصنعها هذه المتجهات مع الإتجاه الموجب لمحور  $\sigma$  فى تمثيل القطب/الصفر .

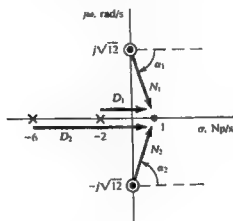
مثال 8-9 : أختبر استجابة الشبكة فى مثال 8-8 لجهد إثارة أسى حيث  $v = 1e^{st}$  حيث  $s = 1$  Np/s .

حدد نقطة الاختبار  $1 + j0$  على رسم قطب/ صفر. ارسم المتجهات من الأقطاب والأصفار إلى نقطة الاختبار واحسب الأطوال والزوايا (انظر شكل 8-15). لذلك:

$$N_1 = N_2 = \sqrt{13}, D_1 = 3, D_2 = 7, \beta_1 = \beta_2 = 0, \text{ and } \alpha_1 = -\alpha_2 = \tan^{-1} \sqrt{12} = 73.9^\circ$$

Hence,

$$H(1) = (0.4) \frac{(\sqrt{13})(\sqrt{13})}{(3)(7)} \angle 0^\circ - 0^\circ = 0.248$$



شكل 8-15

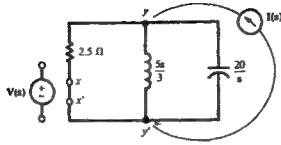
تبين النتائج أنه في حيز الزمن (مجال الزمن)  $i(t) = 0.248 v(t)$  سيصبح كلاً من الجهد والتيار ما لا نهاية طبقاً للدالة  $e^{1t}$ . وفي معظم الحالات العملية فإن  $\sigma$  يجب إما أن تكون سالبة أو صفراً. والطريقة الهندسية السابقة لا يبدو أنها تتطلب معلومات عن تحليل للعلاقة  $H(s)$  كدالة جذرية. ومع هذا فإنه من الواضح إمكانية كتابة العلاقة في حدود المعامل الثابت  $k$  من الأقطاب والأصفار المعروفة للعلاقة  $H(s)$  في رسم قطب/ صفر. انظر المسألة 8-37.

## 8-9 الاستجابة الطبيعية

ركز هذا الفصل على الاستجابة القسرية والاستجابة المستقرة وساعدت طريقة التردد المركب في الحصول على الاستجابة. ومع هذا فإن الترددات الطبيعية التي تصف الاستجابة العابرة سهل الحصول عليها. وهي أقطاب دالة الشبكة.

مثال 8-10 : نفس الشبكة في مثال 8-8 مبيّنة في شكل 8-16. أوجد الاستجابة الطبيعية حينما نضع متبع  $V(s)$  بدلاً من  $xx'$ .





شكل 8-16

دالة الشبكة كما في مثال 8-8.

$$H(s) = (0.4) \frac{s^2 + 12}{(s + 2)(s + 6)}$$

الترددات الطبيعية هي  $-2\text{Np/s}$  ،  $-6\text{Np/s}$  . لذلك فإن التيار الطبيعي أو العابر في المجال الزمني سيأخذ الشكل .

$$i_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

حيث الثابتان  $A_1$  ،  $A_2$  يحددان باستخدام الحالات الابتدائية للاستجابة الكاملة  $i_n = i_n + i_f$  حيث  $i_f$  يبين الاستجابة القسرية .

**مثال 8-11 :** تغذي الشبكة في شكل 8-16 بالتيار  $I(s)$  على طرفي  $yy'$  . وتكون دالة الشبكة  $H(s) = V(s) / I(s) = Z(s)$  الأفرع الثلاثة تكون على التوازي وبذلك :

$$H(s) = Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{2.5} + \frac{3}{3s} + \frac{8}{20}} = \frac{20s}{(s + 2)(s + 6)}$$

ومرة أخرى فإن الأقطاب هي عند  $-2\text{Np/s}$  ،  $-6\text{Np/s}$  وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في مثال 8-10.

## 8-10 مقياس القيمة والتردد

مقياس القيمة

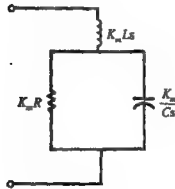
إذا كانت دالة مقاومة الدخول لشبكة  $Z_{in}(s)$  وأيضاً الثابت  $K_m$  هو رقم صحيح موجب فإنه إذا استبدلت كل مقاومة  $R$  في الشبكة بالقيمة  $K_m R$  وكل ملف بالقيمة  $K_m L$  وكل مكثف  $C$  بالقيمة  $C/K_m$  فإن دالة معاوقة الدخول الجديدة ستكون  $K_m Z_{in}(s)$  وبذلك نعتبر أن الشبكة قد تغير مقياس قيمتها بالمعامل  $K_m$ .

مقياس التردد

إذا حدث بدلاً من التغيير السابق أن أبقينا على قيمة المقاومة  $R$  واستبدلنا كلاً من الحث  $L$  بالقيمة  $L/K_f$  ،  $(K_f > 0)$  واستبدلنا العنصر السعوى  $C$  بالقيمة  $C/K_f$  فإن دالة الدخول الجديدة للمعاوقة ستكون  $Z_{in}(s/K_f)$  أى أن الشبكة الجديدة لها نفس المعاوقة عند التردد المركب  $s/K_f$  كما فى الحالة السابقة عند  $s$  . ونقول أن الشبكة قد تغير مقياس ترددها بالمعامل  $K_f$ .

مثال 8-12 : عبر عن  $Z(s)$  للدائرة المبينة شكل 8-17 ولاحظ مقياس القيمة الناتج.

$$Z(s) = K_m Ls + \frac{(K_m R) \frac{K_m}{Cs}}{K_m R + \frac{K_m}{Cs}} = K_m \left[ Ls + \frac{R(1/Cs)}{R + (1/Cs)} \right]$$



شكل 8-17

توجد عدة تطبيقات عملية مقترحة لهذا الغرض المختصر لقياس القيمة . وكمثال إذا كان تيار الدخل لشبكة أكبر مما يجب أن يكون فإن المعامل  $K_m = 10$  سيقلل التيار بالقيمة 1/10 من قيمته السابقة .

### مسائل محلولة

8-1 دائرة RLC توالى بها  $R = 3 \Omega$  ،  $L = 10 \text{ H}$  ،  $C = 20 \mu\text{F}$  وبها منبع جهد ثابت  $V = 50 \text{ V}$  تم توصيله عند  $t = 0$  . (أ) أوجد التيار العابر إذا كان المكثف ليس عليه شحنة ابتدائية . (ب) ارسم التيار وأوجد الزمن الذى تكون عنده القيمة العظمى .

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 150 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0 = \frac{1}{LC} = 500 \text{ s}^{-1} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 148.3 \text{ s}^{-1} \quad (1)$$

الدائرة بها خمد زائد ( $\alpha > \omega_0$ ) .

$$s_1 = -\alpha + \beta = -1.70 \text{ s}^{-1} \quad s_2 = -\alpha - \beta = -298.3 \text{ s}^{-1}$$

$$i = A_1 e^{-1.70t} + A_2 e^{-298.3t} \quad \text{و}$$

وحيث أن الدائرة تحتوى على عنصر حتى  $i(0^+) = i(0^-) = 0$  وأيضاً ،  $Q = (0^+) = Q(0^-) = 0$  . لذلك عند  $t = 0^+$  فإن KVL يعطى :

$$0 + 0 + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = V \quad \text{or} \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = \frac{V}{L} = 5 \text{ A/s}$$

ويطبق هذه الحالات الابتدائية لعلاقة التيار  $i$  .

$$0 = A_1(1) + A_2(1)$$

$$5 = -1.70 A_1(1) - 298.3 A_2(1)$$

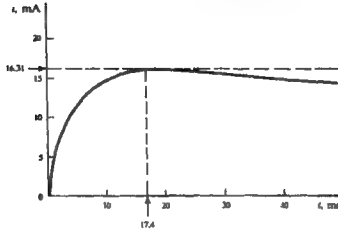
ومنها

$$i = 16.9(e^{-1.70t} - e^{-298.3t}) \quad (\text{mA})$$

(ب) لإيجاد زمن أكبر تيار فإن:

$$\frac{di}{dt} = 0 = -28.73 e^{-1.70t} + 5041.3 e^{-250t.3t}$$

وبالحل باستخدام اللوغاريتمات فإن  $t = 17.4 \text{ ms}$ . انظر شكل 8-18.



شكل 8-18

8-2 دائرة توالى RLC بها  $R = 50 \Omega$  ،  $L = 0.1 \text{ H}$  ،  $C = 50 \mu$  لها جهد ثابت  $V = 100 \text{ V}$  طبق هذا الجهد عند  $t = 0$ . أوجد التيار العابر باعتبار الشحنة الابتدائية على المكثف = صفراً.

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 250 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 2.0 \times 10^5 \text{ s}^{-2} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = j370.8 \text{ rad/s}$$

هذه حالة تذبذب ( $\alpha < \omega_0$ ) ويكون التعبير للتيار هو :

$$i = e^{-250t}(A_1 \cos 370.8t + A_2 \sin 370.8t)$$

والحالات الابتدائية التي حصلنا عليها كما في المسألة 8-1 هي :

$$i(0^+) = 0 \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = 1000 \text{ A/s}$$

وهذه تحدد القيم  $A_2 = 2.70 \text{ A}$  ،  $A_1 = 0$  وبالتالي :

$$i = e^{-250t}(2.70 \sin 370.8t) \text{ (A)}$$

8-3 أعد حل المسألة 8-2 إذا كان للمكثف شحنة ابتدائية  $Q_0 = 2500 \mu C$  .

كل شيء سيقى كما هو كما فى المسألة 8-2 فيما عد الحالة الابتدائية الثانية التى ستكون هنا .

$$0 + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} + \frac{Q_0}{C} = V \quad \text{or} \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = \frac{100 - (2500/50)}{0.1} = 500 \text{ A/s}$$

القيم الابتدائية هنا تكون نصف القيم الابتدائية التى فى المسألة 8-2 بالتناسب فإن :

$$i = e^{-250t}(1.35 \sin 370.8t) \quad (\text{A})$$

8-4 دائرة توازى RLC بها  $R = 50.0 \Omega$  ،  $C = 200 \mu F$  ،  $L = 55.6 \text{ mH}$  لها شحنة ابتدائية على

المكثف  $Q_0 = 5.0 \text{ mC}$  . أوجد قيمة الجهد اللازم للشبكة .

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 50 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 8.99 \times 10^4 \text{ s}^{-2}$$

حيث أن  $\omega_0^2 > \alpha^2$  فإن دالة الجهد تكون متذبذبة وبالتالي :  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 296 \text{ rad/s}$   
ويكون التعبير العام للجهد بالقيمة :

$$v = e^{-50t}(A_1 \cos 296t + A_2 \sin 296t)$$

ومع  $C = 5.0 \times 10^{-3}$  ،  $Q_0 = 5.0 \text{ mC}$  ،  $V_0 = 25.0 \text{ V}$  عند  $t = 0$  ،  $v = 25 \text{ V}$  لذلك  $A_1 = 25.0$  .

$$\frac{dv}{dt} = -50e^{-50t}(296)(-A_1 \sin 296t + A_2 \cos 296t)$$

وعند  $t = 0$  ،  $A_2 = -4.22$  ومنها  $d v / dt = -V_0 / RC = \omega_d A_2 - \alpha A_1$  ، ولذلك .

$$v = e^{-50t}(25.0 \cos 296t - 4.22 \sin 296t) \quad (\text{V})$$

8-5 فى شكل 8-19 أفضل المفتاح عند  $t = 0$  أوجد التيار  $i$  وجهد المكثف  $v_C$  عند  $t > 0$  . بأخذ

الاستجابة الطبيعية للدائرة فى الاعتبار فإن المقاومتين على التوازى وبالتالي :

$$\tau = R_{eq}C = (5 \Omega)(2 \mu F) = 10 \mu s$$

وبالاستمرارية  $v(0^+) = v(0^-) = 0$  وعلاوة على ذلك فإنه كلما  $t \rightarrow \infty$  فإن المكثف يصبح دائرة

مفتوحة تاركاً المقاومة  $20 \Omega$  على التوالي مع الجهد  $50 \text{ V}$  أى أن :

$$i(\infty) = \frac{50}{20} = 2.5 \text{ A} \quad v_C(\infty) = (2.5 \text{ A})(10 \Omega) = 25 \text{ V}$$

وبمعرفة حالات النهاية على  $v_C$  يمكن كتابة :

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} + v_C(\infty) = 25(1 - e^{-t/10}) \text{ (V)}$$

حيث  $t$  تقاس بالميكروثانية  $\mu\text{s}$  ويعطى تيار المكثف بالعلاقة :

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 5e^{-t/10} \text{ (A)}$$

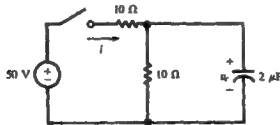
وتيار مقاومة التوازي  $10 \Omega$  بالعلاقة :

$$i_{10\Omega} = \frac{v_C}{10 \Omega} = 2.5(1 - e^{-t/10}) \text{ (A)}$$

Hence

$$i = i_C + i_{10\Omega} = 2.5(1 + e^{-t/10}) \text{ (A)}$$

ويمكن حل المسألة باعتبار تيارات الشبكة وحل المعادلات التفاضلية الآتية :



شكل 8-19

8-6 لدوال الزمن المذكورة فى العمود الأول للجدول 8-2 أكتب القيم وزوايا الوجه المناظرة (على

أساس جيب التمام) والتردد المركب  $s$ .

انظر عمود 2-3 بالجدول .

## جدول 8-2

Time Function	$A/\phi^\circ$	$s$
$i(t) = 86.6 \text{ A}$	$86.6/0^\circ \text{ A}$	0
$i(t) = 15.0e^{-2 \times 10^3 t} \text{ (A)}$	$15.0/0^\circ \text{ A}$	$-2 \times 10^3 \text{ Np/s}$
$v(t) = 25.0 \cos(250t - 45^\circ) \text{ (V)}$	$25.0/-45^\circ \text{ V}$	$\pm j250 \text{ rad/s}$
$v(t) = 0.50 \sin(250t + 30^\circ) \text{ (V)}$	$0.50/-60^\circ \text{ V}$	$\pm j250 \text{ rad/s}$
$i(t) = 5.0e^{-100t} \sin(50t + 90^\circ) \text{ (A)}$	$5.0/0^\circ \text{ A}$	$-100 \pm j50 \text{ s}^{-1}$
$i(t) = 3 \cos 50t + 4 \sin 50t \text{ (A)}$	$5/-53.13^\circ \text{ A}$	$\pm j50 \text{ rad/s}$

8-7 لكل قيمة وزاوية وجه في العمود الأول والتردد المركب  $s$  في العمود الثاني في جدول 8-3 أكتب

دوال الزمن المناظرة.

انظر العمود 3 بالجدول.

## جدول 8-3

$A/\phi^\circ$	$s$	Time Function
$10/0^\circ$	$+j120\pi$	$10 \cos 120\pi t$
$2/45^\circ$	$-j120\pi$	$2 \cos(120\pi t + 45^\circ)$
$5/-90^\circ$	$-2 \pm j50$	$5e^{-2t} \cos(50t - 90^\circ)$
$15/0^\circ$	$-5000 \pm j1000$	$15e^{-5000t} \cos 1000t$
$100/30^\circ$	0	86.6

8-8 قيمة وزاوية وجه  $10\sqrt{2}/45^\circ \text{ V}$  لها تردد مركب مرافق لها  $s = -50 + j100 \text{ s}^{-1}$ . أوجد الجهد

عند الزمن  $t = 10 \text{ ms}$ .

$$v(t) = 10\sqrt{2}e^{-50t} \cos(100t + 45^\circ) \text{ (V)}$$

At  $t = 10^{-2} \text{ s}$ ,  $100t = 1 \text{ rad} = 57.3^\circ$ , and so

$$v = 10\sqrt{2}e^{-0.5} \cos 102.3^\circ = -1.83 \text{ V}$$

8-9 تحتوي شبكة فعالة على مقاومات وملف 70 mH ومكثف 25  $\mu\text{F}$  . أوجد المعاوقة المناظرة في مجال s بجهد غير متغير (أ)  $v = 100 \sin(300t + 45^\circ)$  (V) ، (ب)  $v = 100e^{-100t} \cos 300t$  (V) (أ) لا تعتمد المقاومة على التردد ولذلك فإنه عند  $S = j 300 \text{ rad/s}$  . فإن معاوقة الملف تكون :

$$sL = (j300)(70 \times 10^{-3}) = j21$$

وتلك للمكثف تكون :

$$\frac{1}{sC} = -j133.3$$

(ب) عند  $s = -100 + j 300 \text{ s}^{-1}$  .

$$sL = (-100 + j300)(70 \times 10^{-3}) = -7 + j21$$

$$\frac{1}{sC} = \frac{1}{(-100 + j300)(15 \times 10^{-6})} = -40 - j120$$

8-10 للدائرة المبنية شكل 8-20 أوجد الجهد  $v$  عند  $t = 0.1 \text{ s}$  لتابع تيار (أ)  $i = 10 \cos 2t$  (A) ، (ب)  $i = 10e^{-t} \cos 2t$  (A)

$$Z_{in}(s) = 2 + \frac{2(s+2)}{s+4} = (4) \frac{s+3}{s+4}$$

(a) At  $s = j2 \text{ rad/s}$ ,  $Z_{in}(j2) = 3.22 \angle 7.13^\circ \Omega$ . Then,

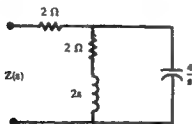
$$V = IZ_{in} = (10 \angle 0^\circ)(3.22 \angle 7.13^\circ) = 32.2 \angle 7.13^\circ \text{ V} \quad \text{or} \quad v = 32.2 \cos(2t + 7.13^\circ) \text{ (V)}$$

$$\text{and } v(0.1) = 32.2 \cos(18.59^\circ) = 30.5 \text{ V.}$$

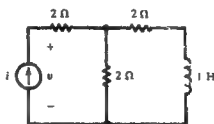
(b) At  $s = -1 + j2 \text{ s}^{-1}$ ,  $Z_{in}(-1 + j2) = 3.14 \angle 11.31^\circ \Omega$ . Then,

$$V = IZ_{in} = 31.4 \angle 11.31^\circ \text{ V} \quad \text{or} \quad v = 31.4e^{-t} \cos(2t + 11.31^\circ) \text{ (V)}$$

$$\text{and } v(0.1) = 31.4e^{-0.1} \cos 22.77^\circ = 26.2 \text{ V.}$$



شكل 8-21



شكل 8-20



8-11 أوجد المعاوقة  $Z_{in}(s)$  للدائرة المبينة شكل 8-21 عند  $s = 0$  (أ) ،  $s = j4$  rad/s (ب) ،  $s = \infty$  (ج) .

$$Z_{in}(s) = 2 + \frac{2(s+1)\left(\frac{4}{s}\right)}{2(s+1) + \frac{4}{s}} = (2) \frac{s^2 + 3s + 4}{s^2 + s + 2}$$

$Z_{in}(0) = 4 \Omega$  (أ) وهي معاوقة التي يلاقيها منبع ثابت للتيار المستمر في الحالة المستقرة .

$$Z_{in}(j4) = 2 \frac{(j4)^2 + 3(j4) + 4}{(j4)^2 + j4 + 2} = 2.33 \angle -29.05^\circ \Omega \quad (\text{ب})$$

وهي المعاوقة التي يلاقيها المنبع  $\sin 4t$  أو  $\cos 4t$  .

(ج)  $Z_{in}(\infty) = 2 \Omega$  عند الترددات العالية جداً يعمل المكثف كما لو كان دائرة قصيرة على طرفي

فرع RL .

8-12 عبر عن المعاوقة  $Z(s)$  لمجموعة التوازي المكونة من  $L = 4$  H ،  $C = 1$  F . عند أى ترددات  $s$  تكون هذه المعاوقة صفر أو ما لا نهاية؟

$$Z(s) = \frac{(4s)(1/s)}{4s + (1/s)} = \frac{s}{s^2 + 0.25}$$

بمجرد النظر  $Z(0) = 0$  ،  $Z(\infty) = 0$  والتي تتفق مع الفهم السابق لدائرة التوازي LC عند ترددات

صفر (dc) وما لا نهاية . لقيم  $|Z(s)| = \infty$  .

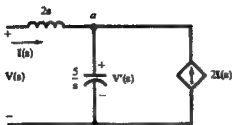
$$s^2 + 0.25 = 0 \quad \text{or} \quad s = \pm j0.5 \text{ rad/s}$$

ومنع الجهد الجيبي ذو التردد 0.5 rad/s يتتبع عنه رنين دائرة التوازي ومعاوقة تساوى ما لا نهاية .

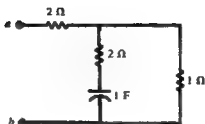
8-13 الدائرة المبينة شكل 8-22 بها منبع جهد متصل بالطرفين a, b . والاستجابة لهذه الاثارة هو تيار الدخل . أوجد دالة الشبكة  $H(s)$  المناسبة .

$$H(s) = \frac{\text{response}}{\text{excitation}} = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)}$$

$$Z(s) = 2 + \frac{(2 + 1/s)(1)}{2 + 1/s + 1} = \frac{3s + 3}{3s + 1} \quad \text{from which} \quad H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{3s + 1}{3s + 3}$$



شكل 8-23



شكل 8-22

8-14 أوجد  $H(s)$  للشبكة المبينة شكل 8-23 حيث تكون إثارتها هو التيار  $I(s)$  والاستجابة هو الجهد عند طرفي الدخل .

بتطبيق KCL عند الوصلة a :

$$I(s) + 2I(s) = \frac{s}{5} V'(s) \quad \text{or} \quad V'(s) = \frac{15}{s} I(s)$$

يعطى KVL عند طرفي الدخل .

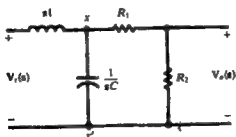
$$V(s) = 2sI(s) + V'(s) = \left(2s + \frac{15}{s}\right)I(s)$$

Then

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{2s^2 + 15}{s}$$

8-15 للشبكة ذات الدخلين المبينة شكل 8-24 أوجد قيم  $R_1$  ،  $R_2$  ،  $C$  إذا علم أن دالة جهد التحويل هي :

$$H_v(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{0.2}{s^2 + 3s + 2}$$



شكل 8-24

المعاوقة ناظرًا من اتجاه  $xx'$  هي :

$$Z' = \frac{(1/sC)(R_1 + R_2)}{(1/sC) + R_1 + R_2} = \frac{R_1 + R_2}{1 + (R_1 + R_2)Cs}$$

ومع تكرار تقسيمات الجهد :

$$\frac{V_o}{V_i} = \left( \frac{V_o}{V_{o'}} \right) \left( \frac{V_{o'}}{V_i} \right) = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \left( \frac{Z'}{Z' + sL} \right) = \frac{R_2 / (R_1 + R_2) C}{s^2 + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} s + \frac{1}{C}}$$

ومساواة المعاملات في هذه العلاقة بتلك التي في العلاقة الخاص بـ  $H_V(s)$  نجد أن :

$$C = \frac{1}{2} \text{ F} \quad R_1 = \frac{3}{5} \Omega \quad R_2 = \frac{1}{15} \Omega$$

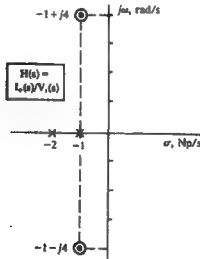
8-16 أوجد رسم القطب/ صفر لدالة المسامحة التحويلية .

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + 2s + 17}{s^2 + 3s + 2}$$

ووصفها في صورة معاملات :

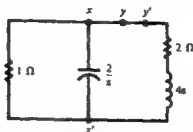
$$H(s) = \frac{(s + 1 + j4)(s + 1 - j4)}{(s + 1)(s + 2)}$$

تحدث الأقطاب عند -1، -2، والأصفار عند  $4 \pm j$ ، -1. انظر شكل 8-25.



شكل 8-25

8-17 أوجد الترددات الطبيعية للشبكة الميئة بشكل 8-26 باستخدام منبع تيار لها فى مكان مناسب .



شكل 8-26

تكون الاستجابة لمنبع التيار المتصل عند  $xx'$  جهداً على نفس الطرفين لذلك تكون دالة الشبكة

$$H(s) = V(s) / I(s) = Z(s) \text{ ومن ثم :}$$

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2/s} + \frac{1}{2+4s} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{s^2 + 2.5s + 1.5}{s + 0.5}$$

Thus,

$$Z(s) = (2) \frac{s + 0.5}{s^2 + 2.5s + 1.5} = (2) \frac{s + 0.5}{(s + 1)(s + 1.5)}$$

الترددات الطبيعية هي أقطاب دالة الشبكة  $s = -1.0 \text{ Np/s}$  ،  $s = -1.5 \text{ Np/s}$  .

8-18 أعد حل المسألة 8-17 باستخدام منبع جهد مناسب للشبكة .

يمكن فتح الموصل عند  $yy'$  شكل 8-26 ووضع منبع جهد وبذلك  $H(s) = I(s) / V(s) = 1/Z(s)$

معاوقة الشبكة عند الطرفين  $yy'$  هي :

$$Z(s) = 2 + 4s + \frac{1(2/s)}{1 + 2/s} = (4) \frac{s^2 + 2.5s + 1.5}{s + 2}$$

Then,

$$H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \left(\frac{1}{4}\right) \frac{s + 2}{s^2 + 2.5s + 1.5}$$

المقام هنا للمعادلة السابقة هو نفسه الذى فى المسألة 8-17 بنفس الجذور والترددات الطبيعية .

8-19 منبع جيبي  $5000 \text{ rad/s}$  قيمته  $V = 100L0^\circ$  (فى الصورة الاتجاهية) طبق على الدائرة شكل

8-27 . أوجد قيمة معامل المقياس  $K_m$  وقيم العناصر التى تحدد التيار بالقيمة  $89 \text{ mA}$  (قيمة

عظمى).

At  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ ,

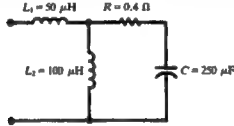
$$\begin{aligned} Z_m &= j\omega L_1 + \frac{(j\omega L_2) \left( R + \frac{1}{j\omega C} \right)}{j\omega L_2 + R + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= j0.250 + \frac{(j0.500)(0.40 - j0.80)}{0.40 - j0.30} = 1.124 \angle 69.15^\circ \Omega \end{aligned}$$

عند  $100 \text{ V}$  ،  $I = 100 / 1.124 = 89.0 \text{ A}$  ، لذلك لتحديد قيمة التيار إلى  $89.0 \times 10^{-3} \text{ A}$  فإن

المعاوقة يجب أن تزداد بالمعامل  $K_m = 10^3$ .

وبذلك تكون قيم عناصر المقياس كالتالي :  $R = 10^3 (0.4) = 400 \Omega$  ،  $L_1 = 10^3 (50 \mu\text{H}) =$

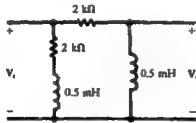
$C = (250 \mu\text{F}) / 10^3 = 0.250 \mu\text{F}$  ،  $L_2 = 10^3 (100 \mu\text{H}) = 100 \text{ mH}$  ،  $50 \text{ mH}$



شكل 8-27

8-20 بالرجوع لشكل 8-28 أوجد  $H(s) = V_o/V_i$  حينما  $s = j4 \times 10^6 \text{ rad/s}$  أجعل مقياس الشبكة

$K_m = 10^{-3}$  وقارن  $H(s)$  للشبكتين :



شكل 8-27

At  $\omega = 4 \times 10^6 \text{ rad/s}$ ,  $X_L = (4 \times 10^6)(0.5 \times 10^{-3}) = 2000 \Omega$ . Then,

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j2000}{2000 + j2000} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

بعد عمل مقياس للقيم فإن الممانعة الحثية هي  $2 \Omega$  ( $2000 \Omega$ )  $10^{-3}$  والمقاومة تكون ( $2 \text{ k}\Omega$ )  $10^{-3}$  ولذلك:  $2 \Omega$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{f2}{2+j2} = \frac{1}{\sqrt{2}} / 45^\circ$$

وتبقى دالة تحويل الجهد بدون تغيير لمقياس قيمتها ويوجه عام فإن أى دالة تحويل بدون وحدات لا تتأثر بمقياس القيم أما دالة التحويل التى تحمل وحدات الأوم ( $\Omega$ ) فإنها تضرب فى المعامل  $K_m$  والدالة التى تشمل وحدات S فإنها تضرب فى  $1/K_m$ .

8-21 دائرة تحتوى على ثلاث عناصر على التوالى  $R = 5 \Omega$ ،  $L = 4 \text{ H}$ ،  $C = 3.91 \text{ mF}$  أوجد تردد رنين التوالى بوحدات rad/s ثم عامل الدائرة بمقياس تردد  $K_f = 1000$ . ارسم  $|Z(\omega)|$  لكل الدائرتين.

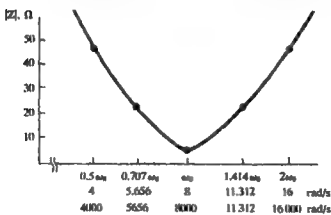
قبل المقياس

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 8 \text{ rad/s} \quad \text{and} \quad Z(\omega_0) = R = 5 \Omega$$

بعد المقياس

$$R = 5 \Omega \quad L = \frac{4 \text{ H}}{1000} = 4 \text{ mH} \quad C = \frac{3.91 \text{ mF}}{1000} = 3.91 \mu\text{F}$$

$$\omega_0 = 1000(8 \text{ rad/s}) = 8000 \text{ rad/s} \quad Z(\omega_0) = R = 5 \Omega$$

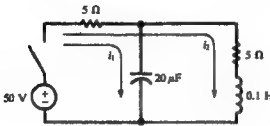


شكل 8-29

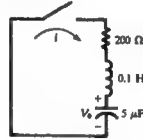
ولذلك بعمل مقياس للتردد بالمعامل 1000 ينتج عنه اعتبار المعاوقة  $5 \Omega$  عند التردد  $8000 \text{ rad/s}$  بدلاً من  $8 \text{ rad/s}$ . وأى قيمة أخرى للمعاوقة تعامل بنفس الطريقة باستخدام المقياس 1000 لقيمتها السابقة وبالتالي فإن الرسمين لقيم  $|Z(\omega)|$  يختلفان فقط فى المقياس الأفقى . انظر شكل 8-29 (يكون نفس الشيء صحيحاً للرسمين لقيم  $\theta_{Z(\omega)}$ ).

### مسائل إضافية

- 8-22 فى دائرة RLC الميئة شكل 8-30 كانت الشحنة الابتدائية على المكثف  $V_0 = 200 \text{ V}$ . أوجد التيار العابر بعد قفل المفتاح عند  $t = 0$ . الجواب:  $-2e^{-1000t} \sin 1000t \text{ (A)}$ .



شكل 8-31



شكل 8-30

- 8-23 دائرة توالى RLC بها  $R = 200 \Omega$  ،  $L = 0.1 \text{ H}$  ،  $C = 100 \mu\text{F}$  بها منبع جهد  $200 \text{ v}$  وصل عند  $t = 0$ . أوجد التيار العابر باعتبار الشحنة الابتدائية على المكثف صفراً.  
الجواب:  $1.055 (e^{-52t} - e^{-1948t}) \text{ A}$ .

- 8-24 ما هى قيمة المكثف الذى يوضح بدل المكثف  $100 \mu\text{F}$  للمسألة 8-23 بحيث ينتج حالة الحمد المضبوط. الجواب:  $10 \mu\text{F}$ .

- 8-25 أوجد تردد الرنين الطبيعى  $\beta$  لدائرة توالى RLC بها  $R = 200 \Omega$  ،  $L = 0.1 \text{ H}$  ،  $C = 5 \mu\text{F}$ .  
الجواب:  $1000 \text{ rad/s}$ .

- 8-26 سلط الجهد  $10 \text{ v}$  عند الزمن  $t = 0$  لدائرة توالى RLC بها  $R = 5 \Omega$  ،  $L = 0.1 \text{ H}$  ،  $C = 500 \mu\text{F}$ . أوجد الجهد العابر على طرفى المقاومة. الجواب:  $3.60e^{-25t} \sin 139t \text{ (V)}$ .

8-27 في الدائرة ذات الشبكتين المبينة شكل 8-31 أقلل المفتاح عند  $t = 0$  . أوجد  $i_1$  ،  $i_2$  لقيم  $t > 0$  .

الجواب :  $i_1 = 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9950t}$  (A)

$i_2 = -5.05e^{-100t} + 5.00 + 0.05e^{-9950t}$  (A)

8-28 يمثل الجهد في مجال  $s$  بالقيمة  $100/30^\circ$  V . أوجد دالة الزمن لكل من (أ)  $s = -2$  Np/s ،

(ب)  $s = -1 + j4$  s<sup>-1</sup> . الجواب : (أ)  $86.6e^{-2t}$  (V) ، (ب)  $100e^{-t} \cos(5t + 30^\circ)$  (V)

8-29 أوجد الترددات المركبة المرافقة للتيار (A)  $i(t) = 5.0 + 10e^{-3t} \cos(50t + 90^\circ)$  . الجواب :

$0, -3 \pm j50$  s<sup>-1</sup>

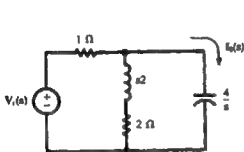
8-30 تيار إنجهاى  $25/40^\circ$  A له تردد مركب  $s = -2 + j3$  s<sup>-1</sup> . ما هي قيمة  $i(t)$  عند الزمن  $t = 0.2$  s .

الجواب : 4.51 A

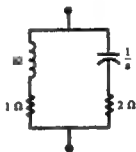
8-31 أحسب المعاوقة  $Z(s)$  للدائرة المبينة شكل 8-32 عند (أ)  $s = 0$  ، (ب)  $s = j1$  rad/s ، (ج)

$s = j2$  rad/s ، (د)  $|s| = \infty$  .

الجواب : (أ)  $1 \Omega$  ، (ب)  $1.58/18.43^\circ \Omega$  ، (ج)  $1.84/12.53^\circ \Omega$  ، (د)  $2 \Omega$  .



شكل 8-33



شكل 8-32

8-32 لجهد المنبع في مجال  $s$  للدائرة المبينة شكل 8-33 في المجال الزمن بالعلاقة التالية :

$v_s(t) = 10e^{-t} \cos 2t$  (V)

أوجد  $i_0(t)$  . الجواب :  $7.07e^{-t} \cos(2t + 98.13^\circ)$  (A)

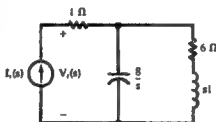


8-33 دائرة التوالى  $R$ ،  $L$ ،  $C$  فى مجال الزمن عليها الجهد  $v_i$  وجهود العناصر  $v_C$ ،  $v_L$ ،  $v_R$ . أوجد دوال تحويل الجهد (أ)  $V_R(s) / V_i(s)$ ، (ب)  $V_C(s) / V_i(s)$ .

الجواب : (a)  $\frac{Rs/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$  ; (b)  $\frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$

8-34 أوجد دالة الشبكة  $H(s)$  للدائرة المبينة شكل 8-34. الاستجابة هى الجهد  $V_i(s)$ . الجواب :

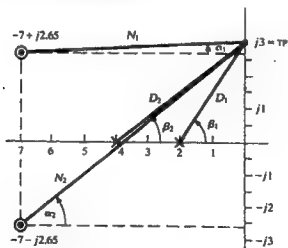
$$\frac{(s+7-j2.65)(s+7+j2.65)}{(s+2)(s+4)}$$



شكل 8-34

8-35 أوجد رسماً لمستوى  $s$  لدالة التحويل للمسألة 8-34. ثم أوجد  $H(j3)$  من الرسم. الجواب: انظر شكل 8-35.

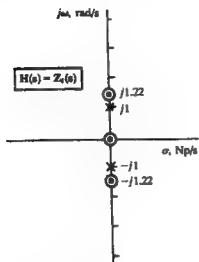
$$\frac{(7.02)(9.0)/2.86^\circ + 38.91^\circ}{(3.61)(5.0)/56.31^\circ + 36.87^\circ} = 3.50/-51.41^\circ \Omega$$



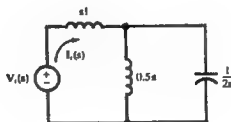
شكل 8-35

8-36 أوجد  $H(s) = V_C(s) / I_1(s)$  للدائرة المبينة شكل 8-36 وارسم شكل قطب/ صفر للدالة .

الجواب :  $H(s) = [s(s^2 + 1.5) / s^2 + 1]$  . انظر شكل 8-37



شكل 8-37



شكل 8-36

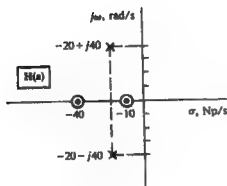
8-37 أكتب دالة التحويل  $H(s)$  التي يكون لها رسم قطب/ صفر كما هو مبين شكل 8-38 .

الجواب :  $H(s) = k [(s^2 + 50s + 400) / (s^2 + 40s + 2000)]$  .

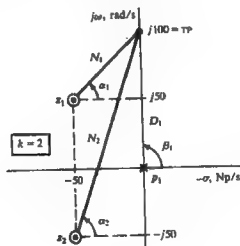
8-38 تبين رسم قطب/ صفر في شكل 8-39 قطبا عند  $s = 0$  وأصفار عند  $s = 50 \pm j50$  . استخدم

الطريقة الهندسية لتحليل دالة التحويل عند نقطة اختبار 100 j .

الجواب :  $H(j100) = 223.6 \angle 26.57^\circ$  .



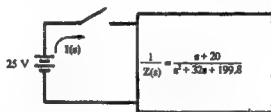
شكل 8-39



شكل 8-38

8-39 دائرة ذات فرعى توازى بها مقاومة  $20 \Omega$  فى أحد الأفرع ومجموعة توازى من  $R = 10 \Omega$  ،  $L = 0.1 \text{ H}$  فى الفرع الآخر وصل أولاً منبع تيار  $I_f(s)$  . وأوجد التردد الطبيعى من مقام دالة الشبكة . جرب مع مواقع مختلفة عند استخدام منبع التيار . ثانياً باستخدام منبع جهد  $V_f(s)$  وأحصل على التردد الطبيعى . الجواب :  $300 \text{ Np/s}$  - لجميع الحالات .

8-40 للشبكة المبينة شكل 8-40 أقل المفتاح عند  $t = 0$  ، عند  $t = 0^+$  . كان  $i = 0$  ،  $di/dt = 25 \text{ A/S}$  .  
أوجد الترددات الطبيعية والتيار الكامل  $i = i_n + i_f$  . الجواب :  $-8.5 \text{ Np/s}$  ،  $-23.5 \text{ Np/s}$  ،  
 $i = -2.25e^{-8.5t} - 0.25e^{-23.5t} + 2.5$  .



شكل 8-40

8-41 دائرة نوالى RLC تحتوى على  $R = 1 \Omega$  ،  $L = 2 \text{ H}$  ،  $C = 0.25 \text{ F}$  استخدم مقياس قيمة ومقياس تردد بالتتابع  $K_m = 2000$  ،  $K_f = 10^+$  ما هى مقاييس قيم العناصر ؟ الجواب :  
 $2000 \Omega$  ،  $0.4 \text{ H}$  ،  $12.5 \mu\text{F}$  .

8-42 تم توصيل جهد قيمته  $V_1 = 25 \text{ L0 V}$  عند تردد معين  $\omega_1$  لشبكة غير فعالة ونتج عن ذلك التيار  $I_1 = 3.85 \angle -30^\circ \text{ A}$  وكان مقياس قيم العناصر باستخدام  $K_m = 10$  . أوجد التيار الذى ينشأ من منبع جهد آخر  $V_2 = 10 \angle 45^\circ \text{ V}$  بدلاً من الأول إذا كان تردد المنبع الثانى هو  $\omega_2 = 10^3 \omega_1$  .  
الجواب :  $0.154 \angle 15^\circ \text{ A}$  .



## الفصل التاسع

### تحليل الدوائر الجيبية المستقرة

#### 9-1 مقدمة

يركز هذا الفصل على الاستجابة المستقرة للدوائر التي تعمل بالمنايع الجيبية . حيث ستكون الاستجابة جيبية أيضاً . ففي الدوائر الخطية فلإن افتراض وجود منبع جيبى لا يمثل تعارض حقيقى حيث أنه يمكن استبدال المنبع الذى يُمثل بدالة دورية بمجموعة متكافئة من الدوال الجيبية (متتالية فوريير) وستعامل مع هذا الأمر فى الفصل السابع عشر .

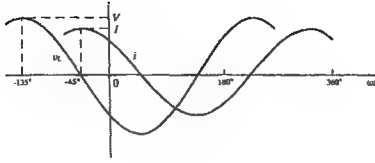
#### 9-2 استجابات العنصر

العلاقات بين الجهد والتيار لعنصر واحد مثل  $R$  ،  $L$  ،  $C$  درست فى الفصل الثانى واختصرت فى جدول 2-1 . وفى هذا الفصل فإن دوال كلاً من  $v$  ،  $i$  فتكون جيبية أو جيب تمام مع الإزاحة للزاوية  $\omega t$  . وتكون  $\omega$  تردد الزاوية وله وحدات rad/s وأيضاً  $\omega = 2\pi f$  حيث  $f$  هى التردد بوحدات ذبذبة/ ثانية أو بشكل عام هيرتز (Hz) .

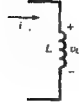
وإذا اعتبرنا عنصر حثى  $L$  مع التيار  $i = I \cos(\omega t + 45^\circ)$  A [انظر شكل 9-1(a)] فيكون التيار

هو :

$$v_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I [-\sin(\omega t + 45^\circ)] = \omega L I \cos(\omega t + 135^\circ) \text{ (V)}$$



(b)



(a)




شكل 9-1

وبمقارنة منحنى  $V_L$  ، نجد أن التيار متأخر عن الجهد بزاوية  $90^\circ$  أو  $\pi/2$  ورسمت الدالتان في شكل (b) 9-1. نلاحظ أن دالة التيار  $i$  إلى اليمين من الجهد  $V$  وحيث أن مقياس الاتجاه الأفقى هو  $\omega t$  فإن القيم إلى اليمين تكون فى زمن متأخر . وهذا يوضح أن  $i$  تتأخر عن  $V$  . ومقياس الاتجاه الأفقى هو بالزاوية نصف القطرية (الدائرية) ولكن نلاحظ أيضاً أنها يمكن أن تكون بالدرجات (135-، 180 . . وهكذا) ويمكن استخدام الوحدات المختلطة كما فى القيمة  $\omega t + 45^\circ$  وفى الحقيقة أن هذا التعبير رياضياً غير صحيح ولكنه مقبول عملياً فى تحليل الدوائر الكهربائية . ويبين المحور الرأسى قيمتين مختلفتين وهما  $V$  ،  $i$  وبذلك لا بد من وجود مقياسان بدلاً من واحد .

وبدراسة الرسم فإنه من المفيد حالياً أن نقرر أن الدالة الجيبية تعرف تماماً حينما نعرف كلاً من القيمة العظمى ( $V$  أو  $I$ ) والتردد ( $f$  أو  $\omega$ ) وزاوية الوجه ( $45^\circ$  أو  $135^\circ$ ) .

ومبين فى جدول 9-1 استجابات العناصر الأساسية للدائرة عند مرور التيار  $i = I \cos \omega t$  والجهد  $v = V \cos \omega t$  وإذا رسمت هذه الاستجابات فإنها ستبين أنه فى حالة المقاومة  $R$  فإن  $R$  ،  $v$  ،  $i$  لهم نفس زاوية الوجه . وللحث  $L$  ،  $i$  تتأخر عن  $v$  بزاوية  $90^\circ$  أو  $\pi/2$  rad . وللمكثف  $C$  فإن  $i$  تتقدم  $v$  بالزاوية  $90^\circ$  أو  $\pi/2$  rad .

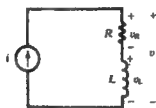
## جدول 9-1

	$i = I \cos \omega t$	$v = V \cos \omega t$
	$v_R = RI \cos \omega t$	$i_R = \frac{V}{R} \cos \omega t$
	$v_L = \omega L I \cos (\omega t + 90^\circ)$	$i_L = \frac{V}{\omega L} \cos (\omega t - 90^\circ)$
	$v_C = \frac{I}{\omega C} \cos (\omega t - 90^\circ)$	$i_C = \omega C V \cos (\omega t + 90^\circ)$

مثال 9-1 : دائرة توالى RL مبينة شكل 9-2 بها التيار  $i = I \sin \omega t$  . أوجد الجهد  $v$  على طرفي عنصريها وارسم كلاً من  $v$  ،  $i$  .

$$v_R = RI \sin \omega t \quad v_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I \sin (\omega t + 90^\circ)$$

$$v = v_R + v_L = RI \sin \omega t + \omega L I \sin (\omega t + 90^\circ)$$



شكل 9-2

حيث أن التيار دالة جيبية وأيضاً :

$$v = V \sin (\omega t + \theta) = V \sin \omega t \cos \theta + V \cos \omega t \sin \theta \quad (1)$$

ومن السابق نحصل على :

$$v = RI \sin \omega t + \omega L I \sin \omega t \cos 90^\circ + \omega L I \cos \omega t \sin 90^\circ \quad (2)$$

وبمساوات المعاملات للحدود المتشابهة في (1) ، (2)

$$V \sin \theta = \omega L I \quad \text{and} \quad V \cos \theta = RI$$

Then

$$v = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin [\omega t + \arctan (\omega L / R)]$$

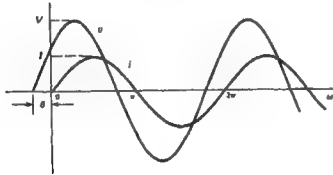
and

$$V = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

رسمت الدالتان لكل من  $i$  ،  $v$  في شكل 9-3 وكانت زاوية الوجه  $\theta$  وهى الزاوية التى يتأخر بها التيار  $i$  عن الجهد  $v$  وهى تقع فى المجال  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  بحيث تكون حدودها حينما  $\omega L \ll R$  ،  $\omega L \gg R$  وإذا كان جهد الدائرة  $v = V \sin \omega t$  فإن التيار الناتج سيكون :

$$i = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin (\omega t - \theta)$$

حيث كما سبق  $\theta = \tan^{-1} (\omega L / R)$  .



شكل 9-3

**مثال 9-2 :** إذا كان التيار فى دائرة توالى RC هو  $i = I \sin \omega t$  فأوجد الجهد الكلى على طرفى العنصرين .

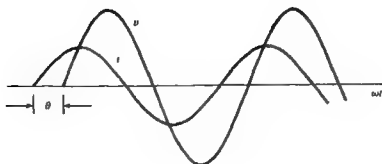
$$v_R = RI \sin \omega t \quad v_C = (1/\omega C) \sin (\omega t - 90^\circ)$$

$$v = v_R + v_C = V \sin (\omega t - \theta)$$

$$V = I \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1} (1/\omega CR) \quad \text{عندما}$$

زاوية الوجه السالبة تزحزح  $v$  إلى اليمين بالنسبة للتيار  $i$  . وبالتالي فإن  $i$  يتقدم  $v$  لدائرة التوالى RC وتكون زاوية الوجه واقعة فى مجال  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  . وعند  $\omega C \ll R$  فإن الزاوية  $\theta = 0^\circ$  وعند  $\omega C \gg R$  فإن الزاوية  $\theta = 90^\circ$  . انظر شكل 9-4 .

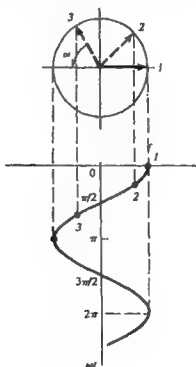




شكل 9-4

### 9-3 الاتجاهات

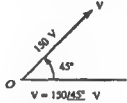
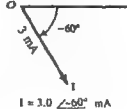
بنظرة سريعة للتغيرات الجيبية للمجهود والتيار في الأمثلة السابقة فإننا نجد أن القيمة العظمى واختلاف زوايا الوجه هما العاملين الهامين. وإذا اعتبرنا قيمة متحركة أو متجه كالمبين في شكل 9-5 حيث تدور في اتجاه عكس عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$  (rad/s) يكون إسقاطه على المحور الأفقي ممثلاً لدالة جيب تمام. ويكون طول هذا المتجه أو قيمته هي القيمة العظمى لدالة جيب التمام. وتكون الزاوية بين وضعين مختلفين للمتجه هو الفرق في زاوية الوجه لقيمتي دالة جيب التمام عند هذين الوضعين.



شكل 9-5

خلال هذا الكتاب ستُعرف المتجهات عن طريق دالة جيب تمام . وإذا عبر عن الجهد أو التيار بدالة الجيب فإنها ستُغير إلى دالة جيب تمام بطرح  $90^\circ$  من زاوية الوجه . اختبر المثالين في جدول 9-2 ولاحظ أن المتجهات التي هي قطعة مستقيمة متجهة تمثل بحروف كبيرة وثقيلة وتكون زاوية الوجه لدالة جيب التمام هي الزاوية على المتجه . وأشكال المتجه وكل ما يتبعه يمكن قياسه من لحظة بداية حركة المتجه نفسه في اتجاه دوراني عكس عقارب الساعة عند الزمن  $t = 0$  . والتردد  $f(\text{Hz})$  ،  $\omega$  (rad/s) . غالباً لا تظهر ولكن يجب أخذها في الاعتبار حيث أنها داخلة ضمن أى مسألة لدائرة جيبية مستقرة .

جدول 9-2

Function	Phasor Representation
$v = 150 \cos(500t + 45^\circ) \text{ (V)}$	
$i = 3.0 \sin(2000t + 30^\circ) \text{ (mA)}$ $= 3.0 \cos(2000t - 60^\circ) \text{ (mA)}$	

مثال 9-3 : مجموعة توالى بها  $L = 20 \text{ mH}$  ،  $R = 10 \Omega$  بها التيار  $i = 5.0 \cos(500t + 10^\circ)$

(A) . أوجد الجهود  $V$  ، والمتجه التيارى  $I$  وارسم شكل المتجهات .

باستخدام الطرق فى مثال 9-1 .

$$v_R = 50.0 \cos(500t + 10^\circ) \quad v_L = L \frac{di}{dt} = 50.0 \cos(500t + 100^\circ)$$

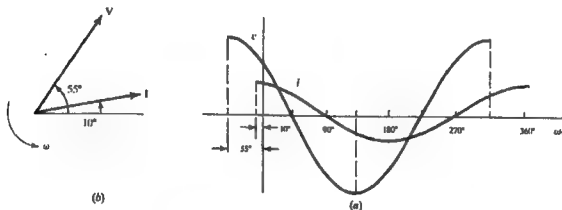
$$v = v_R + v_L = 70.7 \cos(500t + 55^\circ) \text{ (V)}$$

وتكون المتجهات المناظرة :

$$I = 5.0/10^\circ \text{ A} \quad \text{and} \quad V = 70.7/55^\circ \text{ V}$$

تظهر زاوية الوجه  $45^\circ$  فى شكل مجال الزمن لكل من  $i$  ،  $v$  فى شكل 9-6(a) وشكل المتجهات

لكل من  $I$  ،  $V$  فى شكل 9-6(b) .



شكل 9-6

يمكن اعتبار المتجهات كقيم مركبة . فعند اعتبار المحور الأفقى محور القيم الحقيقية للمستوى المركب فإن المتجهات تصبح أعداد مركبة ويطبق عليها القوانين العادية . ومن متساويات أوليز فإنه يوجد ثلاث تعريفات مكافئة للمتجه .

$$V = V / \theta \text{ الصورة القطبية}$$

$$V = V (\cos \theta + j \sin \theta) \text{ الصورة المثلثية}$$

$$V = V e^{j\theta} \text{ الصورة الأسية}$$

وصورة جيب التمام تكتب أيضاً هكذا :

$$v = V \cos(\omega t + \theta) = \text{Re} [V e^{j(\omega t + \theta)}] = \text{Re} [V e^{j\omega t}]$$

والصورة الأسية تقترح كيفية معالجة عمليات الضرب والقسمة كما يلي

ويمكن اقتراح شكل للتعبير الأسى للقيم المضروبة والمقسومة بما يلي :

$$(V_1 e^{j\theta_1})(V_2 e^{j\theta_2}) + V_1 V_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$V_1 / \theta_1 \times V_2 / \theta_2 = V_1 V_2 / \theta_1 + \theta_2$$

$$\text{and, since } (V_1 e^{j\theta_1}) / (V_2 e^{j\theta_2}) = (V_1 / V_2) e^{j(\theta_1 - \theta_2)},$$

$$\frac{V_1 / \theta_1}{V_2 / \theta_2} = V_1 / V_2 / \theta_1 - \theta_2$$

وتستخدم الصورة المثلثية المتعامدة عند جمع أو طرح المتجهات .

**مثال 9-4 :** إذا كان  $V_1 = 25.0 \angle 143.13^\circ$  ،  $V_2 = 11.2 \angle 26.57^\circ$  ، أوجد النسبة  $V_1 / V_2$

والجمع  $V_1 + V_2$  .

$$V_1 / V_2 = \frac{25.0 / 143.13^\circ}{11.2 / 26.57^\circ} = 2.23 / 116.56^\circ = -1.00 + j1.99$$

$$V_1 + V_2 = (-20.0 + j15.0) + (10.0 + j5.0) = -10.0 + j20.0 = 23.36 / 116.57^\circ$$

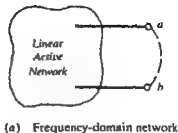
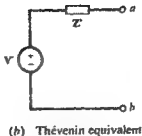
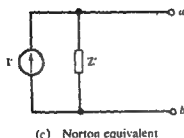
#### 9-4 المعاوقة والسماحية

إذا وصلنا جهداً أو تياراً جيئياً لدائرة غير فعالة RLC فإنه سينشأ تجاوب جيئى . وباعتبار الدوال الزمنية مثل  $v(t)$  ،  $i(t)$  فإن الدائرة يقال عنها أنها فى مجال الزمن - شكل (a) 9-7 - وحينما تحلل الدائرة باستخدام المتجهات فيقال عنها أنها فى مجال التردد شكل (b) 9-7 . ويمكن كتابة كلا من الجهد والتيار على الترتيب كما يلي .

$$\begin{array}{ll} v(t) = V \cos(\omega t + \theta) = \text{Re} [V e^{j\omega t}] & \text{and} \quad V = V / \theta \\ i(t) = I \cos(\omega t + \phi) = \text{Re} [I e^{j\omega t}] & \text{and} \quad I = I / \phi \end{array}$$

ويعبر عن النسبة بين متجه الجهد  $V$  ومتجه التيار  $I$  بالمعاوقة  $Z$  أى أن  $Z = V / I$  . ومقلوب المعاوقة

يسمى السماحية  $Y$  وبالتالي فإن  $Y = 1 / Z(s)$  حيث  $Y = 1 \Omega^{-1} = 1 \text{ mho}$  .  $Y$  ،  $Z$  هي كميات مركبة .



شكل 9-15

### مسائل محلولة

9-1 ملف 10 mH يمر به التيار  $i = 5.0 \cos 2000t$  (A) أوجد الجهد  $v_L$ .

From Table 9-1,  $v_L = \omega L \cos(\omega t + 90^\circ) = 100 \cos(2000t + 90^\circ)$  (V). As a sine function,

$$v_L = 100 \sin(2000t + 180^\circ) = -100 \sin 2000t \quad (\text{V})$$

9-2 دائرة توالي بها  $R = 10 \Omega$  ،  $L = 20 \text{ mH}$  يمر بها التيار  $i = 2.0 \sin 500t$  (A) أوجد الجهد الكلي  $v$  والزاوية التي بها التيار يتأخر عن الجهد  $v$ .

بنفس طرق مثال 9-1.

$$\theta = \arctan \frac{500(20 \times 10^{-3})}{10} = 45^\circ$$

$$v = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \theta) = 28.3 \sin(500t + 45^\circ) \quad (\text{V})$$

ومنها يتضح أن التيار يتأخر عن الجهد  $v$  بالزاوية  $45^\circ$ .

9-3 أوجد عنصرى التوالى فى الدائرة إذا كان التيار والجهد الكلى هما :

$$i = 10 \cos(5000t - 23.13^\circ) \quad (\text{A}) \quad v = 50 \cos(5000t + 30^\circ) \quad (\text{V})$$

حيث أن  $i$  يتأخر عن  $v$  بالزاوية  $53.13^\circ$  فإن العنصرين هما  $R$  ،  $L$  وبالنسبة بين  $V_{\max}$  ،  $I_{\max}$  هى

50/10 . لذلك :

$$\frac{50}{10} = \sqrt{R^2 + (5000L)^2} \quad \text{and} \quad \tan 53.13^\circ = 1.33 = \frac{5000L}{R}$$

وبالحل فإن  $L = 0.8 \text{ mH}$  ،  $R = 3.0 \Omega$ .

### مجموعات المعاوقات

العلاقة  $V = IZ$  (فى مجال التردد) هى من ناحية الشكل مطابقة لقانون أوم  $V = iR$  لشبكة ذات مقاومة مادية (فى مجال الزمن). ولذلك يمكن تجميع المعاوقات تماماً كما فى حالة المقاومات.

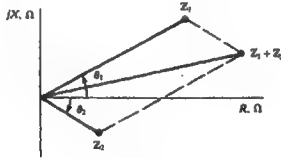
$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots \text{ على التوالى .}$$

$$(1/Z_{eq}) = (1/Z_1) + (1/Z_2) + \dots \text{ على التوازي .}$$

$$Z_{eq} = (Z_1 Z_2) / (Z_1 + Z_2) \text{ على التوازي}$$

### مخطط المعاوقات

فى مخطط المعاوقات تمثل المعاوقة  $Z$  بنقطة فى النصف الأيمن من المستوى المركب . وشكل 9-8 يبين معاومتين  $Z_1$  فى الربع الأول والتي تشمل عازلة حثية بينما  $Z_2$  فى الربع الرابع وتشمل عازلة سعوية ويمكن الحصول على جمعهما بالتوالى  $Z_1 + Z_2$  بمتجه الجمع كما هو مبين . لاحظ أن المتجهات مبنية بدون رؤوس للأسهم من أجل التمييز بينها وبين المتجهات التى نحصل عليها من الأرقام المركبة .



شكل 9-8

### مجموعات السماحيات

باستبدال  $Z$  بالقيمة  $1/Y$  فى العلاقات السابقة فإن :

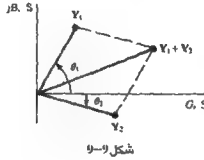
$$(1/Y_{eq}) = (1/Y_1) + (1/Y_2) + \dots \text{ على التوالى .}$$

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots \text{ على التوازي}$$

وبذلك تكون من الأسهل تمثيل دوائر التوالى بالمعاوقات ودوائر التوازي بدلالة السماحيات .

## مخطط السحابة

شكل 9-9 يبين مخطط السحابة المناظر لمخطط المعاوقة 8-9 والشكل يبين سحابتين  $Y_1$  وتشمل مساحمة سعوية ومساحمة  $Y_2$  وتشمل مساحمة حثية بالإضافة إلى جمعتهما الإجمالي  $Y_1 + Y_2$  وهي السحابة التوازي للسحابة  $Y_1$  ،  $Y_2$ .



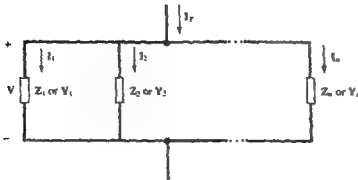
## 9-5 تقسيم الجهد والتيار في مجال التردد

إذا نظرنا للتناظر بين المعاوقة في مجال التردد والمقاومة في مجال الزمن بند 3-6 وبند 3-7 نصل للنتائج التالية:

(1) المعاوقات على التوالي تقسم الجهد الكلي بنسبة يتم هذه المعاوقات

$$\frac{V_r}{V_s} = \frac{Z_r}{Z_s} \quad \text{or} \quad V_r = \frac{Z_r}{Z_{eq}} V_s$$

انظر شكل 9-10



(2) تقسم المعاوقات على التوازي (سماحيات على التوالي). تقسم التيار الكلى بنسبة عكسية لقيم هذه المعاوقات (بنسبة مباشرة لقيم السماحيات).

$$\frac{I_r}{I_s} = \frac{Z_s}{Z_r} = \frac{Y_r}{Y_s} \quad \text{or} \quad I_r = \frac{Z_{eq}}{Z_r} I_s = \frac{Y_r}{Y_{eq}} I_s$$

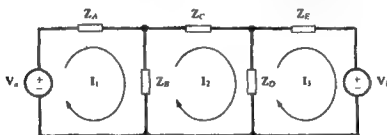
انظر شكل 9-11

## 9-6 طريقة تيار الشبكة

إذا اعتبرنا الشبكة فى شكل 9-12 فى مجال التردد وتطبيق KVL كما فى بند 4-3 أو بطريقة أبسط بمجرد النظر نحصل على معادلة المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

وذلك بالنسبة لتيارات الشبكة المجهولة  $I_1, I_2, I_3$ . وهنا  $Z_{11} = Z_A + Z_B$  هى المعاوقة الذاتية للشبكة 1 وهى مجموع جميع المعاوقات التى يمر بها  $I_1$ . وبالمثل  $Z_{22} = Z_B + Z_C + Z_D$   $Z_{33} = Z_D + Z_E$  هى المعاوقات الذاتية للشبكات 2، 3.



شكل 9-12

العنصر 1-2 لمصفوفة Z يعرف بالتالى (المعاوقات المشتركة بين  $I_1, I_2$ )  $Z_{12} = Z_B$ .

وتعتبر الإشارة الموجبة إذا مر كلا التياران فى نفس الاتجاه وتؤخذ الإشارة السالبة إذا كان أحدهما فى عكس اتجاه الآخر ويمكن استنتاج أيضاً أن  $Z_{12} = Z_{21}$ . فى شكل 9-12 يمر كلا من  $I_1, I_2$  فى المعاوقة  $Z_B$  فى إتجاهين متضادين لذلك:

$$Z_{12} = Z_{21} = -Z_B$$



وبالمثل :

$$Z_{13} = Z_{31} = \sum \pm (I_3 , I_1 \text{ المشتركة بين } I_3 , I_1) = 0$$

$$Z_{23} = Z_{32} = \sum \pm (I_3 , I_2 \text{ المشتركة بين } I_3 , I_2) = -Z_D$$

مصفوفة المعاوقات  $Z$  تكون متماثلة .

فى عمود الجهد  $V$  فى الطرف الأيمن للمعادلة يمكن إدخال القيمة العامة  $V_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) تماماً كما عرفت فى بند 4-3 .

$$V_k = \sum \pm (k \text{ الشبيكة } k)$$

وتأخذ علامة التجميع الإشارة الموجبة إذا كان اتجاه الجهد فى اتجاه  $I_k$  وتأخذ الإشارة السالبة فى حالة العكس وبالنسبة للشبيكة فى شكل 9-12 .

$$V_1 = +V_a \quad V_2 = 0 \quad V_3 = -V_b$$

بدلاً من استخدام الشبيكات للشبكة المرسومة على سطح معين فإنه فى بعض الأحيان يكون من اللائق اختيار مجموعة مناسبة من الحلقات تحتوى كلا منها على سبيكة بداخلها أو أكثر ومن السهل معرفة أن اثنين من تيارات الحلقات يمكن أن يكون لهما نفس الاتجاه فى أحد المعاوقات ولهما اتجاهين متضادين فى معاوقة أخرى . ومع هذا فإن القواعد السابقة لكتابة كلا من مصفوفة  $Z$  وعمود  $V$  وضعت بطريقة لتناسب مع تطبيقها على الشبيكات أو الحلقات . وهذه القوانين بالطبع تنطبق مع تلك المستخدمة فى بند 4-3 لكتابة كلا من مصفوفة  $R$  وعمود  $V$  .

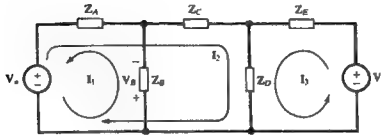
مسألة 6-9 : أفرض أن الجهد الإجمالى على طرفى المعاوقة  $Z_B$  لها قطبيه كما فى شكل 9-13 وباختيار شبيكات كما فى شكل 9-12 سيؤدى ذلك لحل كلا من  $I_1$  ،  $I_2$  ثم الحصول على الجهد  $V_B = (I_2 - I_1) / Z_B$  . فى شكل 9-13 تم اختيار ثلاث حلقات (اثنان منها شبيكات) وذلك لجعل التيار  $I_1$  هو التيار الوحيد فى  $Z_B$  بالإضافة إلى ذلك فإنه تم اختيار اتجاه  $I_1$  حيث يكون  $V_B = I_1 Z_B$  . ويتكوين معادلة المصفوفة يكون :

$$\begin{bmatrix} Z_A + Z_B & -Z_A & 0 \\ -Z_A & Z_A + Z_C + Z_D & Z_D \\ 0 & Z_D & Z_D + Z_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_a \\ V_a \\ V_b \end{bmatrix}$$

ومنها

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{Z}_B \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_B}{\Delta_Z} \begin{vmatrix} -V_s & -Z_A & 0 \\ V_s & Z_A + Z_B + Z_C & Z_D \\ V_s & Z_D & Z_D + Z_E \end{vmatrix}$$

حيث  $\Delta_Z$  المحدد لمصفوفة  $\mathbf{Z}$ .



شكل 9-13

معاوقات الدخل والانتقال

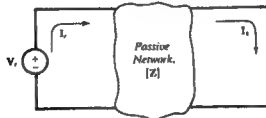
إن ترميز مقاومة الدخل (بند 4-5) ومقاومة الانتقال (بند 4-6) لهما نفس المدلول في مجال التردد. ولذلك فإن للشبكة ذات المنبع الواحد شكل 9-14 تكون معاوقة الدخل:

$$\mathbf{Z}_{\text{input},r} = \frac{\mathbf{V}_r}{\mathbf{I}_r} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rr}}$$

حيث  $\Delta_{rr}$  هي العامل المشترك للمعاوقة  $\mathbf{Z}_{rr}$  في  $\Delta_Z$  ومعاوقة الانتقال بين الشبكة (أو الحلقة)  $r$  والشبكة (أو الحلقة)  $s$  هي:

$$\mathbf{Z}_{\text{transfer},rs} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_r} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rs}}$$

حيث  $\Delta_{rs}$  هي العامل المشترك للمعاوقة  $\mathbf{Z}_{rs}$ ،  $\Delta_Z$ .



شكل 9-14

كما ذكر سابقاً فإن طريقة التراكب لعدد اختياري  $n$  من الشبكات  $n$  أو من الحلقات في الشبكة يمكن التعبير عنها كالتالي :

$$I_k = \frac{V_1}{Z_{transfer,1k}} + \dots + \frac{V_{k-1}}{Z_{transfer,(k-1)k}} + \frac{V_k}{Z_{input,k}} + \frac{V_{k+1}}{Z_{transfer,(k+1)k}} + \dots + \frac{V_n}{Z_{transfer,nk}}$$

## 9-7 طريقة جهد العقدة

بنفس الطريقة المتبعة في بند 4-4 وباستخدام المسامحات بدلاً من معكوس المقاومات . وباعتبار شبكة في مجال التردد لها  $n$  من العقد الرئيسية تعين أحدها بأن تكون عقدة المقارنة وذلك يتطلب  $n-1$  معادلة جهد العقدة . وعلى ذلك فإنه حينما تكون  $n = 4$  فإن معادلة المصفوفة ستكون :

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

ونكون المجاهيل  $V_1$  ،  $V_2$  ،  $V_3$  وهى جهود العقد الرئيسية 1 ، 2 ، 3 بالنسبة للعقدة الرئيسية 4 وهى عقدة المقارنة .

$Y_{11}$  هى المسامحة الذاتية للعقدة 1 والمعطاة بمجموع جميع المسامحات المتصلة بالعقدة 1- وبالمثل  $Y_{22}$  ،  $Y_{33}$  هما المسامحتان الذاتيتان للعقدتين 2 ، 3-.

$Y_{12}$  هى السامحية الواصلة بين العقدتين 1 ، 2 وتعطى بالمجموع السالب لجميع المسامحات المتصلة بين العقدتين 1 ، 2 ومنها نستنتج أن  $Y_{12} = Y_{21}$  وبالمثل للمسامحات الواصلة الأخرى  $Y_{13} = Y_{31}$  ،  $Y_{23} = Y_{32}$  وبذلك تكون مصفوفة  $Y$  متماثلة وفى الطرف الأيمن للمعادلة يتكون عمود  $I$  تماماً كما فى بند 4-4 .

أى أن  $I_k = \sum (k)$  (التيار الداخلى فى العقدة  $k$ ) ( $k = 1, 2, 3$ )  
ومنها نستنتج أن التيار الخارج من العقدة  $k$  يعتبر سالباً .

## مسامحات الدخل الانتقال

معادلة المصفوفة بطريقة جهد العقدة هي :

$$[Y][V] = [I]$$

وهي مطابقة في الشكل لمعادلة المصفوفة في طريقة تيار الشبكة .

$$[Z][I] = [V]$$

وبذلك يمكن اعتبار نظرياً على الأقل بأن مسامحتى الدخل والانتقال يمكن تعريفها بالتناظر مع مقاومتي الدخل والانتقال .

$$Y_{input,r} = \frac{I_r}{V_r} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rr}}$$

$$Y_{transfer,rz} = \frac{I_r}{V_z} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rz}}$$

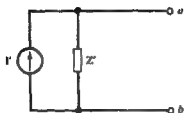
ويكون هنا العاملين المشتركين لكل من  $Y_{rs}$  ،  $Y_{rr}$  في  $\Delta_Y$  هما  $\Delta_{rs}$  ،  $\Delta_{rr}$  . وعملياً فإن استخدام هذه التعريفات محدود . وعلى الرغم من ذلك فإنه قد يكون مفيداً في إيجاد العلاقات الخاصة بأساسيات التراكب (بالنسبة للجهود) .

$$V_k = \frac{I_1}{Y_{transfer,1k}} + \dots + \frac{I_{k-1}}{Y_{transfer,(k-1)k}} + \frac{I_k}{Y_{input,k}} + \frac{I_{k+1}}{Y_{transfer,(k+1)k}} + \dots + \frac{I_{n-1}}{Y_{transfer,(n-1)k}}$$

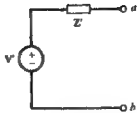
لقيم  $k = 1, 2, \dots, n-1$  وبتعبير لفظي فإن الجهد عند أى عقدة رئيسية (بالنسبة لعقدة المقارنة) يمكن الحصول عليه بجمع الجهود الواصلة لتلك العقدة عن طريق التيارات الداخلة إليها بشرط حدوث هذه التيارات في نفس الوقت .

## 9-8 نظريتي ثيفينن ونورتون

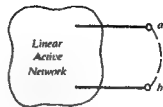
وهذا مماثل تماماً لما جاء في بند 4-9 باعتبار جهد الدائرة المفتوحة  $V'$  وتيار الدائرة القصيرة  $I'$  والدائرة الممثلة  $R'$  لتحل محلها الجهد الإتجاهي للدائرة المفتوحة  $V'$  والتيار الإتجاهي للدائرة القصيرة  $I'$  والمعاوقة الممثلة  $Z'$  . انظر شكل 9-15 .



(c) Norton equivalent



(b) Thévenin equivalent



(a) Frequency-domain network

شكل 9-15

### مسائل محلولة

9- ملف 10 mH يمر به التيار  $i = 5.0 \cos 2000t$  (A) أوجد الجهد  $v_L$ .

From Table 9-1,  $v_L = \omega L i \cos(\omega t + 90^\circ) = 100 \cos(2000t + 90^\circ)$  (V). As a sine function,

$$v_L = 100 \sin(2000t + 180^\circ) = -100 \sin 2000t \quad (\text{V})$$

9- دائرة تتوالى بها  $R = 10 \Omega$  ،  $L = 20 \text{ mH}$  يمر بها التيار  $i = 2.0 \sin 500t$  (A) أوجد الجهد الكلى  $v$  والزواية التي يتأخر عن الجهد  $v$ .

بنفس طرق مثال 9-1.

$$\theta = \arctan \frac{500(20 \times 10^{-3})}{10} = 45^\circ$$

$$v = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \theta) = 28.3 \sin(500t + 45^\circ) \quad (\text{V})$$

ومنها يتضح أن التيار يتأخر عن الجهد  $v$  بالزاوية  $45^\circ$ .

9-3 أوجد عنصرى التوالى فى الدائرة إذا كان التيار والجهد الكلى هما :

$$i = 10 \cos(5000t - 23.13^\circ) \quad (\text{A}) \quad v = 50 \cos(5000t + 30^\circ) \quad (\text{V})$$

حيث أن  $i$  يتأخر عن  $v$  بالزاوية  $53.13^\circ$  فإن العنصرين هما  $R$  ،  $L$  وبالنسبة بين  $V_{\max}$  ،  $I_{\max}$  هى

50/10 . لذلك :

$$\frac{50}{10} = \sqrt{R^2 + (5000L)^2} \quad \text{and} \quad \tan 53.13^\circ = 1.33 = \frac{5000L}{R}$$

وبالحل فإن  $R = 3.0 \Omega$  ،  $L = 0.8 \text{ mH}$ .

9-4 دائرة تتوالى بها  $R = 2.0 \Omega$  ،  $C = 200 \text{ pF}$  متصل بها جهد جيبى ذو التردد  $99.47 \text{ MHz}$  فإذا كان القيمة العظمى للجهد على طرفى المكثف  $24 \text{ V}$  ما هى القيمة العظمى على طرفى مجموعة التوالى .

$$\omega = 2\pi f = 6.25 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

من جدول 9-1  $I_{\max} = \omega C V_{C, \max} = 3.0 \text{ A}$  ومن ثم بالطريقة المذكورة فى مثال 9-2 .

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} = \sqrt{(6)^2 + (24)^2} = 24.74 \text{ V}$$

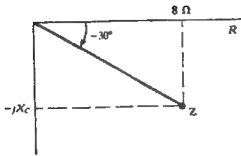
9-5 إذا كان التيار فى دائرة التوالى  $R = 5 \Omega$  ،  $L = 30 \text{ mH}$  يتأخر عن الجهد والزاوية  $80^\circ$  . أوجد تردد المنبع والمعاوقة  $Z$ .

من مخطط المعاوقات شكل 9-16 .

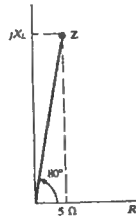
$$5 + jX_L = Z / 80^\circ \quad X_L = 5 \tan 80^\circ = 28.4 \Omega$$

وبالتالى فإن :  $28.4 = \omega(30 \times 10^{-3})$  , whence  $\omega = 945.2 \text{ rad/s}$  and  $f = 150.4 \text{ Hz}$  .

$$Z = 5 + j28.4 \Omega$$



شكل 9-17



شكل 9-16

9-6 عند أى تردد سيتقدم التيار بالجهد بالزاوية  $30^\circ$  فى دائرة التوالى التى بها  $R = 8 \Omega$  ،  $C = 30 \mu\text{F}$  . من شكل متجهات المعاوقة 9-17 .

$$8 - jX_C = Z / -30^\circ \quad -X_C = 8 \tan(-30^\circ) = -4.62 \, \Omega$$

$$\text{Then} \quad 4.62 = \frac{1}{2\pi f(30 \times 10^{-6})} \quad \text{or} \quad f = 1149 \, \text{Hz}$$

9- دائرة توالى RC بها  $R = 10 \, \Omega$  وزاوية معاومتها  $-45^\circ$  عند التردد  $f_1 = 500 \, \text{Hz}$  أوجد التردد الذى يكون قيمة المعاوقة عنده (أ) ضعف القيمة عند  $f_1$  ، (ب) نصف القيمة عند  $f_1$  .

$$\text{From } 10 - jX_C = Z_1 / 45^\circ, X_C = 10 \, \Omega \text{ and } Z_1 = 14.14 \, \Omega.$$

(أ) لتكون القيمة الضعف .

$$10 - jX_C = 28.28 / 0^\circ \quad \text{or} \quad X_C = \sqrt{(28.28)^2 - (10)^2} = 26.45 \, \Omega$$

وحيث أن  $X_C$  تتناسب عكسياً مع  $f$  .

$$\frac{10}{26.45} = \frac{f_2}{500} \quad \text{or} \quad f_2 = 189 \, \text{Hz}$$

(ب) القيمة  $Z_2$  مستحيلة حيث أن أصغر قيمة ممكنة للمعاوقة  $Z$  هي حينما  $Z = R = 10 \, \Omega$  .

9-8 دائرة بها عنصران على التوالى متصل بها الجهد  $V = 240 \angle 0^\circ \, \text{V}$  والتيار  $I = 50 \angle -60^\circ \, \text{A}$  . أوجد التيار الناتج حينما تنخفض المقاومة إلى 30% و (ب) إلى 60% من قيمتها الأولى .

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{240 / 0^\circ}{50 / -60^\circ} = 4.8 / 60^\circ = 2.40 + j4.16 \, \Omega$$

$$30\% \times 2.40 = 0.72 \quad Z_1 = 0.72 + j4.16 = 4.22 / 80.2^\circ \, \Omega \quad (أ)$$

$$I_1 = \frac{240 / 0^\circ}{4.22 / 80.2^\circ} = 56.8 / -80.2^\circ \, \text{A}$$

$$60\% \times 2.40 = 1.44 \quad Z_2 = 1.44 + j4.16 = 4.40 / 70.9^\circ \, \Omega \quad (ب)$$

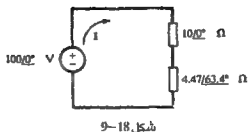
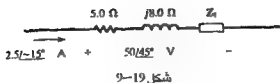
$$I_2 = \frac{240 / 0^\circ}{4.40 / 70.9^\circ} = 54.5 / -70.9^\circ \, \text{A}$$

9-9 للدائرة المبينة شكل 9-18 أوجد  $Z_{eq}$  وأحسب التيار  $I$  .

لمعاوقات التوالى :

$$Z_{eq} = 10 / 0^\circ + 4.47 / 63.4^\circ = 12.0 + j4.0 = 12.65 / 18.43^\circ \, \Omega$$

$$\text{Then} \quad I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{100 / 0^\circ}{12.65 / 18.43^\circ} = 7.91 / -18.43^\circ \, \text{A}$$



9-10 أوجد المعاوقة  $Z_1$  في الدائرة المبينة شكل 9-19.

$$Z = \frac{V}{I} = 20 / 60^\circ = 10.0 + j17.3 \, \Omega$$

حيث أن معاوقات التوالي تجمع فإن :

$$5.0 + j8.0 + Z_1 = 10.0 + j17.3 \quad \text{or} \quad Z_1 = 5.0 + j9.3 \, \Omega$$

9-11 أحسب المعاوقة المكافئة  $Z_{eq}$  والمساحية المكافئة  $Y_{eq}$  للدائرة ذات الأربعة أفرع المبينة شكل 9-20.

باستخدام المسامحات :

$$Y_1 = \frac{1}{j3} = -j0.20 \, S$$

$$Y_3 = \frac{1}{15} = 0.067 \, S$$

$$Y_2 = \frac{1}{5 + j8.66} = 0.05 - j0.087 \, S$$

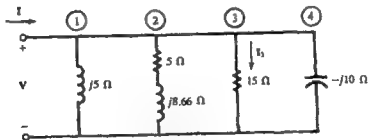
$$Y_4 = \frac{1}{-j10} = j0.10 \, S$$

Then

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0.117 - j0.187 = 0.221 / -58.0^\circ \, S$$

and

$$Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = 4.53 / 58.0^\circ \, \Omega$$





9-12 التيار الكلى الداخلى للدائرة المبينة شكل 9-20 هو  $33.0 \angle -13.0^\circ$  A أوجد تيار الفرع  $I_3$  والجهد  $V$ .

$$V = IZ_{in} = (33.0 \angle -13.0^\circ)(4.53 \angle 58.0^\circ) = 149.5 \angle 45.0^\circ \text{ V}$$

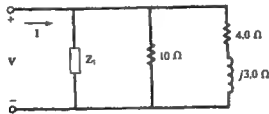
$$I_3 = VY_1 = (149.5 \angle 45.0^\circ) \left( \frac{1}{15} \angle 10^\circ \right) = 9.97 \angle 45.0^\circ \text{ A}$$

9-13 أوجد  $Z_1$  فى الشبكة ذات الثلاث أفرع فى شكل 9-21 إذا كان  $I = 31.5 \angle 24.0^\circ$  A إذا كان الجهد المستخدم  $V = 50.0 \angle 60.0^\circ$  V.

$$Y = \frac{I}{V} = 0.630 \angle -36.0^\circ = 0.510 - j0.370 \text{ S}$$

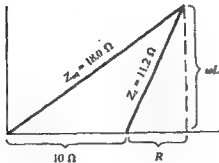
Then  $0.510 - j0.370 = Y_1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{4.0 + j3.0}$

whence  $Y_1 = 0.354 \angle -45^\circ \text{ S}$  and  $Z_1 = 2.0 + j2.0 \Omega$ .

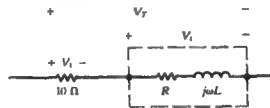


شكل 9-21

9-14 يمكن قياس ثوابت الملف  $R$ ،  $L$  بتوصيله على التوالى مع مقاومة معروفة وقياس كلا من  $V_x$ ، وجهد المقاومة  $V_1$ ، والجهد الكلى  $V_T$  كما فى شكل 9-22. ويجب أيضاً معرفة التردد ولكن زاوية الوجه بين الجهود ليست معروفة. والقيم المعطاة هى  $V_1 = -20 \text{ V}$ ،  $f = 60 \text{ Hz}$ ،  $V_T = 36.0 \text{ V}$ ،  $V_x = 22.4 \text{ V}$ ، أوجد  $R$ ،  $L$ .



شكل 9-23



شكل 9-22

قيم الجهود المقاسة هي القيم المؤثرة ولكن باعتبار حسابات المعوقات فإنه لا فرق بين الحسابات بالقيم المؤثرة أو بالقيم العظمى .

التيار (المؤثر) هو  $I = V_1 / 10 = 2.0 \text{ A}$  ، ومن ثم :

$$Z_s = \frac{22.4}{2.0} = 11.2 \Omega \quad Z_{eq} = \frac{36.0}{2.0} = 18.0 \Omega$$

من مخطط متجهات المعوقات شكل 9-23 .

$$(18.0)^2 = (10 + R)^2 + (\omega L)^2$$

$$(11.2)^2 = R^2 + (\omega L)^2$$

حيث  $\omega = 2\pi 60 = 337 \text{ rad/s}$  . وتابع الحل .

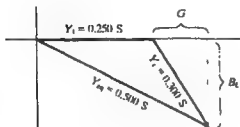
$$R = 4.92 \Omega \quad L = 26.7 \text{ mH}$$

9-15 في دائرة التوازي المبينة شكل 9-24 كانت القيم المؤثرة للتيارات هي  $I_x = 18.0 \text{ A}$  ،  $I_1 = 15.0 \text{ A}$  ،  $I_T = 30.0 \text{ A}$  ،  $A$  ،  $R$  ،  $X_L$  .

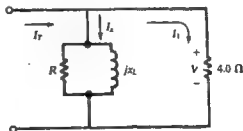
يمكن حل المسألة بطريقة مشابهة للمستعملة في المسألة 9-14 ولكن باستخدام مخطط متجهات المسامحات .

الجهود المؤثر هو  $V = I_1 (4.0) = 60.0 \text{ V}$  لذلك :

$$Y_s = \frac{I_s}{V} = 0.300 \text{ S} \quad Y_{eq} = \frac{I_T}{V} = 0.500 \text{ S} \quad Y_1 = \frac{1}{4.0} = 0.250 \text{ S}$$



شكل 9-25



شكل 9-24

من مخطط متجهات المسامحات شكل 9-25 .

$$(0.500)^2 = (0.250 + G)^2 + B_L^2$$

$$(0.300)^2 = G^2 + B_L^2$$

which yield  $G = 0.195 \text{ S}$ ,  $B_L = 0.228 \text{ S}$ . Then

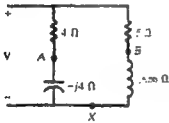
$$R = \frac{1}{G} = 5.13 \Omega \quad \text{and} \quad jX_L = \frac{1}{-jB_L} = j4.39 \Omega$$

i.e.,  $X_L = 4.39 \Omega$ .

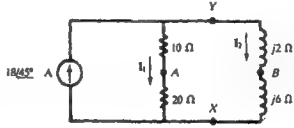
9-16 أوجد متجه الجهد  $V_{AB}$  في دائرة التوازي ذات الفرعين المبينة شكل 9-26.

بطريقة تقسيم التيار  $I_1 = 4.64 \angle 120.1^\circ \text{ A}$  ،  $I_2 = 17.4 \angle 130.1^\circ \text{ A}$  يمكن أخذ أيًا من المسارين AXB أو AYB وباختيار الأول.

$$V_{AB} = V_{AX} + V_{XB} = I_1(20) - I_2(j6) = 92.8 \angle 120.1^\circ + 104.4 \angle -59.9^\circ = 11.6 \angle -59.9^\circ \text{ V}$$



شكل 9-27



شكل 9-26

9-17 في دائرة التوازي المبينة شكل 9-27 :  $V_{AB} = 48.3 \angle 30^\circ \text{ V}$  أوجد جهد منبع  $V$ .

بتقسيم الجهد في كلا الفرعين :

$$V_{AX} = \frac{-j4}{4 - j4} V = \frac{1}{1 + j} V \quad V_{BX} = \frac{j8.66}{5 + j8.66} V$$

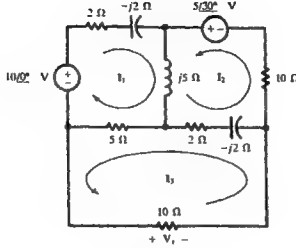
and so

$$V_{AB} = V_{AX} - V_{BX} = \left( \frac{1}{1 + j} - \frac{j8.66}{5 + j8.66} \right) V = \frac{1}{-0.268 - j1} V$$

9-18 أوجد الجهد  $V_X$  في الشبكة المبينة شكل 9-28 باستخدام طريقة تيار الشبكة.

or

$$V = (-0.268 + j1)V_{AB} = (1.035 \angle 105^\circ)(48.3 \angle 30^\circ) = 50.0 \angle 135^\circ \text{ V}$$



شكل 9-28

مبين في الشكل أحد الاختيارات لتيارات الشبكة باعتبار  $I_3$  يمر في المقاومة  $10 \Omega$  في اتجاه حيث يكون  $V_x = I_3(10)$ . ويمكن كتابة معادلة المصفوفة بمجرد النظر كما يلي :

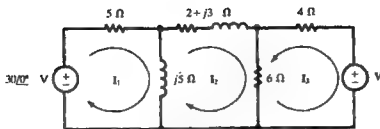
$$\begin{bmatrix} 7+j3 & j5 & 5 \\ j5 & 12+j3 & -(2-j2) \\ 5 & -(2-j2) & 17-j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ 5\angle 30^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

والحل باستخدام المحددات :

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7+j3 & j5 & 10\angle 0^\circ \\ j5 & 12+j3 & 5\angle 30^\circ \\ 5 & -2+j2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7+j3 & j5 & 5 \\ j5 & 12+j3 & -2+j2 \\ 5 & -2+j2 & 17-j2 \end{vmatrix}} = \frac{667.96\angle -169.09^\circ}{1534.5\angle 25.06^\circ} = 0.435\angle -194.15^\circ \text{ A}$$

$$\text{and } V_x = I_3(10) = 4.35\angle -194.15^\circ \text{ V.}$$

9-19 في الشبكة المبينة شكل 9-29 أوجد الجهد  $V$  الذي ينشأ عنه تيار يساوى صفراً في المعاوقة  $2 + j3 \Omega$ .



شكل 29-9

وباختيار تيارات الشبكة كما هو مبين في رسم الدائرة .

$$I_2 = \frac{1}{\Delta_z} \begin{vmatrix} 5 + j5 & 30\angle 0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & 6 \\ 0 & V & 10 \end{vmatrix} = 0$$

وبفك محدد البسط بعوامله المساعدة للعمود الثاني .

$$-(30\angle 0^\circ) \begin{vmatrix} -j5 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - V \begin{vmatrix} 5 + j5 & 0 \\ -j5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{whence} \quad V = 35.4\angle 45.0^\circ \text{ V}$$

9-29 أعد حل المسألة 9-19 بطريقة جهد العقدة .

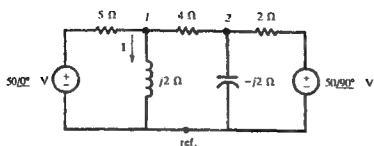
ترسم الشبكة مرة أخرى كما في شكل 9-30 باعتبار أحد أطراف المعاوقة  $2 + j3 \Omega$  كمعقدة

مقارنة . وباستخدام قوانين بند 9-7 فإن معادلة المصفوفة تكون :

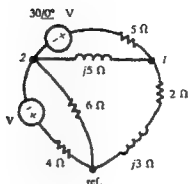
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2 + j3} & -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j5}\right) \\ -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j5}\right) & \frac{1}{5} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30\angle 0^\circ}{5} \\ \frac{-30\angle 0^\circ}{5} - \frac{V}{4} \end{bmatrix}$$

لكي يكون جهد العقدة  $V_1$  صفراً فإنه يلزم أن يتلاشى بسط للمحدد لقيمة  $V_1$  .

$$N_1 = \begin{vmatrix} \frac{30\angle 0^\circ}{5} & -0.200 + j0.200 \\ \frac{-30\angle 0^\circ}{5} - \frac{V}{4} & 0.617 - j0.200 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{from which} \quad V = 35.4\angle 45^\circ \text{ V}$$



شكل 9-31



شكل 9-30

9-21 استخدم طريقة جهد العقدة للحصول على التيار  $I$  في الشبكة المبينة شكل 9-31.

يوجد ثلاث عقد رئيسية. في الشبكة نختار منها عقدة مقارنة والعقدة رقم 1 اختيرت بحيث يكون جهد العقدة 1 هو الجهد على طرف الممانعة  $2-j$ .

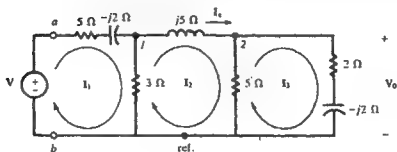
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50\angle 0^\circ}{5} \\ \frac{50\angle 90^\circ}{2} \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -0.250 \\ j25 & 0.750 + j0.500 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.450 - j0.500 & -0.250 \\ -0.250 & 0.750 + j0.500 \end{vmatrix}} = \frac{13.52/56.31^\circ}{0.546/-15.94^\circ} = 24.76/72.25^\circ \text{ V}$$

and

$$I = \frac{24.76/72.25^\circ}{2\angle 90^\circ} = 12.38/-17.75^\circ \text{ A}$$

9-22 أوجد معاوقة الدخول عند الطرفين  $ab$  للشبكة المبينة شكل 9-32.



شكل 9-32

باختيار تيار الشبكة  $I_1$  كما هو مبين في الشكل فإن :

$$Z_{input,1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8+j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7-j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8+j5 & -5 \\ -5 & 7-j2 \end{vmatrix}} = \frac{315.5/16.19^\circ}{45.2/24.86^\circ} = 6.98/-8.67^\circ \Omega$$

9-23 في الدائرة المبينة شكل 9-32 أوجد تيار الملف  $I_2$  بالحصول أولاً على معاوقة الانتقال بفرض

$$V = 10 \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$Z_{transfer,12} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{315.5/16.19^\circ}{\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 7-j2 \end{vmatrix}} = 14.45/32.14^\circ \Omega$$

Then

$$I_1 = I_2 = \frac{V}{Z_{transfer,12}} = \frac{10/30^\circ}{14.45/32.14^\circ} = 0.692/-2.14^\circ \text{ A}$$

9-24 للشبكة المبينة شكل 9-32 أوجد قيمة جهد المنبع  $V$  الذي ينشأ عنه الجهد  $V_0 = 5.0 \angle 0^\circ \text{ V}$ .

نستخدم معاوقة الانتقال لحساب قيمة التيار في المعاوقة  $2\Omega$  ج-2 التي يمكن منها إيجاد  $V_0$

مباشرة .

$$Z_{transfer,13} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{315.5/16.19^\circ}{15/0^\circ} = 21.0/16.19^\circ \Omega$$

$$V_0 = I_1(2-j2) = \frac{V}{Z_{transfer,13}}(2-j2) = V(0.135/-61.19^\circ)$$

Thus, if  $V_0 = 5.0 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,

$$V = \frac{5.0/0^\circ}{0.135/-61.19^\circ} = 37.0/61.19^\circ \text{ V}$$

طريقة أخرى :

يمكن استخدام طريقة جهد العقدة . فيكون  $V_0$  هو جهد العقدة  $V_2$  وذلك باختيار العقد المبينة في

شكل 9-32.

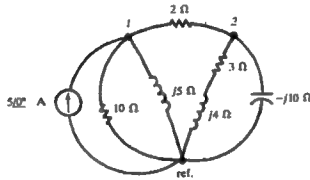
$$V_0 = V_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{5-j2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{j5} & \frac{V}{5-j2} \\ -\frac{1}{j5} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{5-j2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{j5} & -\frac{1}{j5} \\ -\frac{1}{j5} & \frac{1}{j5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2-j2} \end{vmatrix}} = V(0.134 / -61.15^\circ)$$

عند  $V_0 = 5.0 \angle 0^\circ$  V  $V = 37.3 \angle 61.15^\circ$  V والتي تتفق مع الإجابة السابقة بتجاوزات طفيفة .

9-25 للشبكة المبينة في شكل 9-33 . أوجد مساحمة الدخل واستخدامها لحساب جهد العقدة  $V_1$  .

$$Y_{\text{input},1} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4} + \frac{1}{-j10} \end{vmatrix}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4} + \frac{1}{-j10}} = 0.311 / -49.97^\circ \text{ S}$$

$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{\text{input},1}} = \frac{5.0 \angle 0^\circ}{0.311 / -49.97^\circ} = 16.1 \angle 49.97^\circ \text{ V}$$



شكل 9-33

9-26 للشبكة المسألة 9-25 أحسب مساحمة الانتقال  $Y_{\text{transfer},12}$  . واستخدامها للحصول على جهد العقدة  $V_2$  .

$$Y_{\text{transfer},12} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{12}} = \frac{0.194 / -55.49^\circ}{-(-0.50)} = 0.388 / -55.49^\circ \text{ S}$$

$$V_2 = \frac{I_1}{Y_{\text{transfer},12}} = 12.9 \angle 55.49^\circ \text{ V}$$

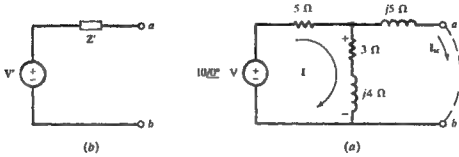


9-27 استبدل الشبكة الفعالة في شكل 9-34(a) على الطرفين ab بمكافئ ثنين .

$$Z' = j5 + \frac{5(3+j4)}{5+3+j4} = 2.50 + j6.25 \quad \Omega$$

جهد الدائرة المفتوحة  $V'$  عند الطرفين ab هو الجهد على المعاوقة  $3 + j4 \Omega$ .

$$V' = \left( \frac{10/0^\circ}{8+j4} \right) (3+j4) = 5.59 \angle 26.56^\circ \text{ V}$$



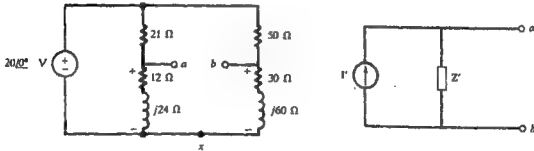
شكل 9-34

9-28 لشبكة المسألة 9-27 أوجد الدائرة المكافئة لنورتون شكل 9-35 .

على طرفي ab :  $I_{sc}$  هو تيار نورتون  $I'$  ويتقسم التيار :

$$I' = \frac{10/0^\circ}{5 + \frac{j5(3+j4)}{3+j9}} \left( \frac{3+j4}{3+j9} \right) = 0.830 \angle -41.63^\circ \text{ A}$$

معاوقة التوازي  $Z'$  هي كما وجدت في المسألة 9-27 ،  $Z' = 2.50 + j6.25 \Omega$ .



شكل 9-36

شكل 9-35

9-29 أوجد مكافئ ثنين للدارة الكبرى في شكل 9-36 خذ  $V'$  هو جهد النقطة a بالنسبة للنقطة b.

بتقسيم الجهد فى كل فرع :

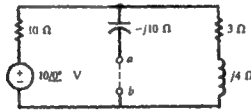
$$V_{ax} = \frac{12 + j24}{33 + j24} (20\angle 0^\circ) \quad V_{bx} = \frac{30 + j60}{80 + j60} (20\angle 0^\circ)$$

Hence  $V_{ab} = V_{ax} - V_{bx} = (20\angle 0^\circ) \left( \frac{12 + j24}{33 + j24} - \frac{30 + j60}{80 + j60} \right) = 0.326\angle 169.4^\circ \quad V \approx V'$

وإذا نظرنا للدائرة عند ab مع قصر جهد المنبع فإن الدائرة ستكون عبارة عن مجموعتين على التوازي كلا منها متصل على التوالى وبذلك :

$$Z' = \frac{21(12 + j24)}{33 + j24} + \frac{50(30 + j60)}{80 + j60} = 47.35\angle 26.81^\circ \Omega$$

9-30 استبدل الشبكة فى شكل 9-37 عند الطرفين ab بمكافئ نورتن مع مكافئ ثنتين .



شكل 9-37

بتقسيم التيار :

$$I_{sc} = I' = \left[ \frac{10\angle 0^\circ}{10 + \frac{(-j10)(3 + j4)}{3 - j6}} \right] \left( \frac{3 + j4}{3 - j6} \right) = 0.439\angle 105.26^\circ \text{ A}$$

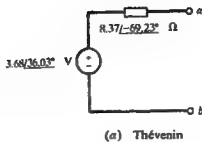
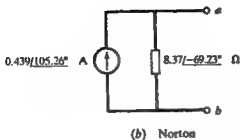
ويتقسيم الجهد فى الدائرة المفتوحة :

$$V_{ab} = V' = \frac{3 + j4}{13 + j4} (10\angle 0^\circ) = 3.68\angle 36.03^\circ \text{ V}$$

Then

$$Z' = \frac{V'}{I'} = \frac{3.68\angle 36.03^\circ}{0.439\angle 105.26^\circ} = 8.37\angle -69.23^\circ \Omega$$

انظر شكل 9-38 .



شكل 9-38

### مسائل إضافية

9-31 عنصران في دائرة متصلان على التوالي بهما التيار والجهد الكلي

$i = 13.42 \sin(500t - 53.4^\circ) \text{ (A)}$  ،  $v = 150 \sin(500t + 10^\circ) \text{ (V)}$   
 عرف العنصرين .  
 الجواب :  $L = 20 \text{ mH}$  ،  $R = 5 \Omega$

9-32 عنصران في دائرة متصلان على التوالي بهما التيار والجهد الكلي

$i = 40 \cos(2000t - 13.2^\circ) \text{ (A)}$  ،  $v = 200 \sin(2000t + 50.0^\circ) \text{ (V)}$   
 عرف العنصرين .  
 الجواب :  $L = 125 \mu\text{F}$  ،  $R = -30 \Omega$

9-33 دائرة توألى RC بها  $R = 27.5 \Omega$  ،  $C = 66.7 \mu\text{F}$  بها جهود و تيار جيبي يتردد زاوية  $1500 \text{ rad/s}$  . أوجد زاوية الوجه التي يتقدم بها التيار الجهد . الجواب :  $20^\circ$  .

9-34 دائرة توألى RLC بها  $R = 15 \Omega$  ،  $L = 80 \text{ mH}$  ،  $C = 30 \mu\text{F}$  يمر بها تيار جيبي بتردد زاوية  $500 \text{ rad/s}$  . أوجد زاوية الوجه وبين ما إذا كان التيار يتقدم أو يتأخر الجهد الكلي . الجواب : يتقدم  $60.6^\circ$  .

9-35 يتصل المكثف  $C = 35 \mu\text{F}$  على التوازي مع أحد العناصر . بين نوع هذا العنصر إذا كان الجهد الكلي والتيار هما :

$v = 150 \sin 300t \text{ (V)}$  ،  $i_T = 16.5 \sin(3000t + 72.4^\circ) \text{ (A)}$   
 الجواب :  $R = 30.1 \Omega$

9-36 دائرة توالى من عنصرين بها  $R = 20 \Omega$  ،  $L = 20 \text{ mH}$  ومعاوقتها  $\Omega \angle \theta$   $40.0$  أحسب الزاوية  $\theta$  . والتردد . الجواب :  $267 \text{ Hz}$  ،  $50^\circ$  .

9-37 أوجد معاوقة التوالى  $RL$  بها  $R = 25 \Omega$  ،  $L = 10 \text{ mH}$  عند (أ)  $100 \text{ Hz}$  ، (ب)  $500 \text{ Hz}$  ، (ج)  $1000 \text{ Hz}$  . الجواب : (أ)  $\Omega \angle 14.1^\circ$  ،  $25.8$  ، (ب)  $\Omega \angle 51.5^\circ$  ،  $40.1$  ، (ج)  $\Omega \angle 68.3^\circ$  ،  $67.7$  .

9-38 أوجد عنصرى دائرة التوالى إذا كان الجهد  $(V) = 150 \sin(5000t + 45^\circ)$  ينشأ عنه التيار  $(A) = 3.0 \sin(5000t - 15^\circ)$  . الجواب :  $8.66 \text{ mH}$  ،  $25 \Omega$  .

9-39 دائرة توالى بها  $R = 10 \Omega$  ،  $C = 40 \mu F$  ، والجهد المستخدم

$$(V) = 500 \cos(2500t - 20^\circ)$$

$$(A) = 25\sqrt{2} \cos(2500t + 25^\circ)$$

9-40 ثلاث معاوقات على التوالى هى  $Z_1 = 3.0 \angle 45^\circ \Omega$  ،  $Z_2 = 10 \angle 45^\circ \Omega$  ،

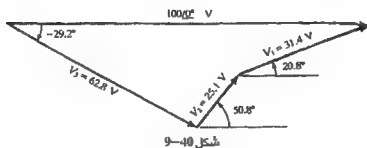
$Z_3 = 5.0 \angle 90^\circ \Omega$  أوجد الجهد المستخدم  $V$  إذا كان الجهد على طرفى  $Z_1$  هو  $V = 27.0 \angle -10^\circ$  .

$$V = 126.5 \angle -24.5^\circ$$

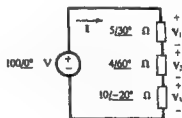
9-41 للثلاث عناصر المتصلة على التوالى شكل 9-39 (أ) أوجد التيار  $I$  ، (ب) أوجد الجهد على طرفى

كل مقاومة وارسم مخطط المتجهات للجهد الذى يبين أن  $V_1 + V_2 + V_3 = 100 \angle 0^\circ V$  .

الجواب : (أ)  $I = 6.28 \angle -9.17^\circ A$  ، (ب) انظر شكل 9-40 .



شكل 9-40

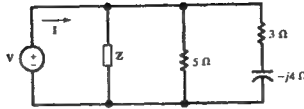


شكل 9-39

9-42 أوجد قيمة المعاوقة  $Z$  فى دائرة التوازي الميئة شكل 9-41 إذا كان  $(V) = 50.0 \angle 30.0^\circ$  ،

$$(A) = 27.9 \angle 57.8^\circ$$

$$\Omega \angle -30^\circ$$

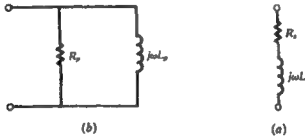


شكل 9-41

9-43 أوجد المواصلة والمساحية الناتجة عن الجهد  $V = 85.0 \angle 205^\circ$  (V) والتيار  $I = 41.21 \angle -141.0^\circ$  (A).  
(A). الجواب: مكثف (سعوى)  $0.47/s, 0.117 s$ .

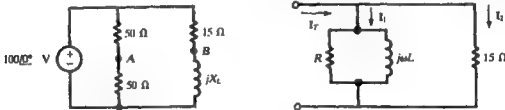
9-44 ملف عملى يحتوى على كلا من المقاومة المادية والمعاوقة الحثية ويمكن تمثيله إما بدائرة توالى أو بدائرة توازى كما هو مبين شكل 9-42 أوجد كلا من  $R_p, L_p$  بدلالة  $R_s, L_s$ .

الجواب: 
$$Ans. R_p = R_s + \frac{(\omega L_s)^2}{R_s}, L_p = L_s + \frac{R_s^2}{\omega^2 L_s}$$



شكل 9-42

9-45 فى الشبكة المبينة شكل 9-43 كانت قيمة التيارات  $I_2 = 8.0 A, I_1 = 22.3 A, I_T = 29.9 A$  والتردد 60-Hz. أوجد عنصرى الدائرة R, L. الجواب:  $5.8 \Omega, 38.5 mH$ .

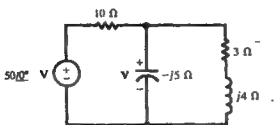


شكل 9-44

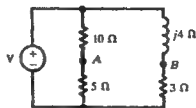
شكل 9-43

9-46 أوجد قيمة الجهد  $V_{AB}$  فى فرعى التوازي للشبكة المرسومة شكل 9-44 إذا كان  $X_L = 5 \Omega$  ،  
(ب)  $15 \Omega$  ، (ج)  $0 \Omega$  . الجواب :  $50 \text{ V}$  لأى قيمة لـ  $X_L$  .

9-47 فى الشبكة التى فى شكل 9-45  $V_{AB} = 36.1 \angle 18^\circ \text{ V}$  . أوجد جهد المتبع  $V$  . الجواب :  
 $75 \angle 90^\circ \text{ V}$



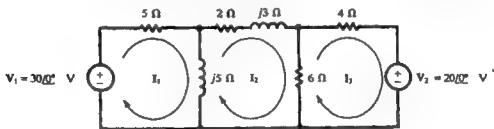
شكل 9-46



شكل 9-45

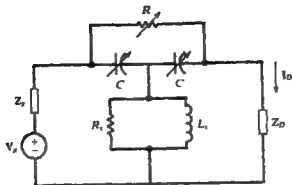
9-48 للشبكة التى فى شكل 9-46 حدد مجموعتين مختلفتين من تيارات الشبكة وبين أن لكل منها  $\Delta Z = 55.9 \angle -26.57^\circ \Omega^2$  ولكل اختيار أحسب جهد المتبع  $V$  وأوجد جهد المتجه على طرفى  
المعاوقة  $4 \Omega + j3$  وقارن بالجهد  $V$  . الجواب :  $V = V_{3+j4} = 22.36 \angle -10.30^\circ \text{ V}$  .

9-49 للشبكة المبينة شكل 9-47 استخدم طريقة تيار الشبكة لإيجاد التيار فى المعاوقة  $2 \Omega + j3$  لكل  
من منبع الجهد  $V_1$  ،  $V_2$  . الجواب :  $1.36 \angle 141.45^\circ \text{ A}$  ،  $2.41 \angle 6.45^\circ \text{ A}$  .



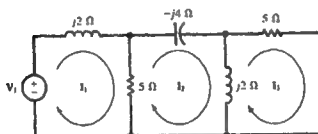
شكل 9-47

9-51 فى الشبكة المبينة شكل 9-48 ضبطت قيم كلا من المكثفين المتساويين  $C$  ، ومقاومة التوازي  $R$  حتى  
أصبح تيار المين  $I_D$  للقيمة صفر . وباعتبار تردد الزاوية للمنبع  $\omega$  أوجد قيم كلا من  $L_x$  ،  $R_x$  .  
الجواب :  $R_x = 1/(\omega^2 C^2 R)$  ،  $L_x = 1/(2\omega C)$  .



شكل 9-48

9-51 للشبكة التي في شكل 9-49 أوجد نسبة التيار  $I_1/I_2$  . الجواب :  $3.3 \angle -90^\circ$  .



شكل 9-49

9-52 للشبكة التي في شكل 9-49 .

أوجد  $Z_{input,1}$  ،  $Z_{input,13}$  ، بين أن  $Z_{transfer,31} = Z_{transfer,13}$  .

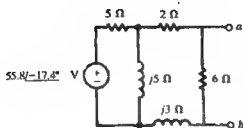
الجواب :  $1.31 \angle 21.8^\circ \Omega$  ،  $4.31 \angle -68.2^\circ \Omega$  .

9-53 للشبكة المبينة شكل 9-50 . أوجد النسبة بين  $V_1/V_2$  . وذلك بتطبيق طريقة جهد العقدة .

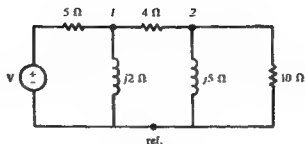
الجواب :  $(\Delta_{11}/\Delta_{12}) = 1.61 \angle -29.8^\circ$  .

9-54 للشبكة المبينة شكل 9-50 . أوجد المعاوقة المكافئة عند النقطة  $Z_{input,1}$  . الجواب :

$5.59 \angle 17.35^\circ \Omega$  .



شكل 9-51



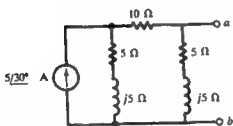
شكل 9-50

9-55 أوجد الدائرة المكافئة لكلا من ثغنين ونورتون عند الطرفين ab للشبكة المبينة بشكل 9-51. اختيار الإشارات بحيث تكون  $V' = V_{ab}$ .

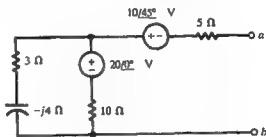
الجواب:  $V' = 20.0 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $I' = 5.56 \angle -23.05^\circ \text{ A}$ ,  $Z' = 3.60 \angle 23.06^\circ \Omega$

9-56 أوجد الدائرة المكافئة لثغنين ونورتون عند الطرفين ab للشبكة المبينة (شكل 9-52).

الجواب:  $V' = 11.5 \angle -95.8^\circ \text{ V}$ ,  $I' = 1.39 \angle -80.6^\circ \text{ A}$ ,  $Z' = 8.26 \angle -15.2^\circ \Omega$



شكل 9-53



شكل 9-52

9-57 أوجد الدائرة المكافئة لكل من ثغنين ونورتون عند الطرفين ab للشبكة المبينة شكل 9-53.

الجواب:  $V' = 11.18 \angle 93.43^\circ \text{ V}$ ,  $I' = 2.24 \angle 56.56^\circ \text{ A}$ ,  $Z' = 5.0 \angle 36.87^\circ \Omega$



## ملحق A

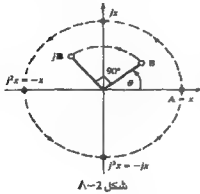
### نظام الأعداد المركبة

#### A1 الأعداد المركبة

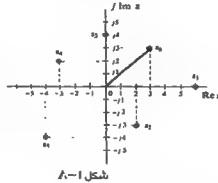
العدد المركب  $z$  هو عدد في صورة  $x + jy$  حيث  $x$ ،  $y$  هي أعداد حقيقية،  $j = \sqrt{-1}$ . ونكتب  $x = \text{Re } z$  وهي الجزء الحقيقي للعدد  $z$ ،  $y = \text{Im } z$  وهي الجزء التخيلي للعدد  $z$ . وإذا كانت الأجزاء الحقيقية متساوية والأجزاء التخيلية متساوية لعددين كان العددين متساويين.

#### A2 المستوى المركب

لزوج من المحاور المتعامدة بحيث يمثل المحور الأفقي  $\text{Re } z$  والمحور الرأسى  $\text{Im } z$  يحددان المستوى المركب الذى فيه كل عدد مركب يمثل نقطة واحدة وبالرجوع لشكل A-1 والذى فيه نبين ستة أعداد مركبة يبدو منه أن كل عدد مركب يمثل متجه خاص به من نقطة الأصل فى المستوى المركب كما هو مبين للعدد المركب  $z_6$  فى شكل A-1.



$$\begin{aligned} z_1 &= 6 \\ z_2 &= 2 - j3 \\ z_3 &= j4 \\ z_4 &= -3 + j2 \\ z_5 &= -4 - j4 \\ z_6 &= 3 + j3 \end{aligned}$$



#### A3 المعامل المتجه $j$

بالإضافة لتعريف  $z$  المذكور فى بند A1 يمكن النظر إليه كمعامل يعمل على إدارة (لف) أى عدد مركب (متجه)  $A$  بالزاوية  $90^\circ$  فى اتجاه عكس عقارب الساعة وفى حالة كون  $A$  كمية حقيقية خالصة، مثل  $x$  المبينة فى شكل A-2 فإن دوران  $A$  يحولها إلى  $jx$  على المحور الموجب التخيلى وبلاستمرار فى ذلك فإن  $2j$  يتقدم عن  $A$   $180^\circ$ ،  $3j$  و  $270^\circ$  و  $4j$  و  $360^\circ$ . مبين أيضاً فى شكل A-2 العدد المركب  $B$  فى الربع الأول ويصنع الزاوية  $\theta$ . لاحظ أن  $B$  فى الربع الثانى عند الزاوية  $90^\circ + \theta$ .

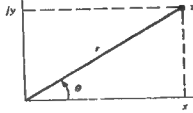
#### A4 التمثيلات الأخرى للأعداد المركبة

عرفت الأعداد المركبة بند A1 بشكلى الإحداثيات. وفى شكل A-3  $x = r \cos \theta$ ،  $y = r \sin \theta$

والعدد المركب  $x$  يمكن كتابته في الشكل المثلثي كالتالي :

$$z = x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

حيث  $r$  هي الرقمي الحسابي أو القيمة المطلقة (والتعبير  $r = |z|$  هو المستعمل الشائع) بحيث أن  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  ، الزاوية  $\theta = \tan^{-1} (y/x)$  وهي زاوية العدد .



شكل 8-3

تسمح علاقة أويلر بتمثيل آخر للعدد المركب يسمى الشكل الأسّي .

$$z = r \cos \theta + jr \sin \theta = re^{j\theta}$$

وشكل آخر شائع الاستعمال في تحليل الدوائر هو شكل ستاينمتر القطبي  $z = r \angle \theta$  حيث  $\theta$  بالدرجات .

### A5 جمع وطرح الأعداد المركبة

لجمع عددين مركبين فإننا نجمع الأجزاء الحقيقية معا والأجزاء المركبة معا وفي الطرح كذلك نطرح الأجزاء الحقيقية معا ونطرح الأجزاء التخيلية معا ومن وجهة النظر العملية فإننا نقوم بعملية الجمع والطرح بطريقة أسهل ، حينما يكون كلا العددين في شكل الإحداثيات .

مثال A.1 : إذا كان  $z_1 = 5 - j2$  ،  $z_2 = -3 - j8$  ،

$$z_1 + z_2 = (5 - 3) + j(-2 - 8) = 2 - j10$$

$$z_2 - z_1 = (-3 - 5) + j(-8 + 2) = -8 - j6$$

### A6 ضرب الأعداد المركبة

نضرب عددين مركبين حينما يكون كلاهما في الشكل الأسّي ويكون الناتج مباشرة من قوانين الأس .

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

وحاصل ضرب ستاينمتر القطبي مستنتج من الشكل القطبي .

$$z_1 z_2 = (r_1 \angle \theta_1)(r_2 \angle \theta_2) = r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2$$

وحاصل الضرب بالطريقة المثلثية يمكن التعامل معه كأعداد مركبة ذات حدين .

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1 x_2 + jx_1 y_2 + jy_1 x_2 + j^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

مثال A.2 : If  $z_1 = 5e^{j\pi/3}$  and  $z_2 = 2e^{-j\pi/6}$ , then  $z_1 z_2 = (5e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$ .

مثال A.3 : If  $z_1 = 2/\underline{30^\circ}$  and  $z_2 = 5/\underline{-45^\circ}$ , then  $z_1 z_2 = (2/\underline{30^\circ})(5/\underline{-45^\circ}) = 10/\underline{-15^\circ}$ .

مثال A.4 : If  $z_1 = 2 + j3$  and  $z_2 = -1 - j3$ , then  $z_1 z_2 = (2 + j3)(-1 - j3) = 7 - j9$ .

## A.7 قسمة الأعداد المركبة

خارج قسمة عددين مركبين في الشكل الأسى يستتج مباشرة من قوانين الأس .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

ومرة أخرى فإن الشكل القطبي لستاينتر في القسمة يستتج من الشكل الأسى .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 / \theta_1}{r_2 / \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} / \theta_1 - \theta_2$$

وقسمة عددا مركبان في الشكل الإحداثى يكون بضرب كلا البسط والمقام بمرافق المقام (انظر

بند A.8).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \left( \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} \right) = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال A.5 : إذا كان Given  $z_1 = 4e^{j\pi/3}$  and  $z_2 = 2e^{j\pi/6}$ ,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$$

مثال A.6 : إذا كان Given  $z_1 = 8/\underline{-30^\circ}$  and  $z_2 = 2/\underline{-60^\circ}$ ,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8/\underline{-30^\circ}}{2/\underline{-60^\circ}} = 4/\underline{30^\circ}$$

مثال A.7 : إذا كان Given  $z_1 = 4 - j5$  and  $z_2 = 1 + j2$ ,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - j5}{1 + j2} \left( \frac{1 - j2}{1 - j2} \right) = -\frac{6}{5} - j\frac{13}{5}$$

## A.8 مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب  $z = x + jy$  هو العدد المركب  $z^* = x - jy$  وبالتالي فإن :

$$\text{Re } z = \frac{z + z^*}{2} \quad \text{Im } z = \frac{z - z^*}{2j} \quad |z| = \sqrt{zz^*}$$

فى المستوى المركب النقط  $z^*$  ،  $z$  هى كصورة مرآة لانعكاس محور القيم الحقيقية

فى الشكل الأسى :  $z^* = re^{-j\theta}$  ،  $z = re^{j\theta}$  .

فى الشكل القطبى :  $z^* = r L^{-\theta}$  ،  $z = r L^{\theta}$  .

فى الشكل المثلثى :  $z^* = r(\cos \theta - j \sin \theta)$  ،  $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$  .

$$(i) \quad (z^*)^* = z$$

$$(iii) \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$(ii) \quad (z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$

$$(iv) \quad \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

## B ملحق

## المصفوفات والمحددات

### B1 المعادلات الآنية ومصفوفات الخواص

توصف كثير من النظم الهندسية بمجموعة من المعادلات الآتية الغير مطلقة من الدرجة الأولى ذات الشكل .

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

حيث  $x_j$  هي المتغيرات الغير مطلقة  $y_j$  هي المتغيرات المطلقة ،  $z_j$  هي معاملات المتغيرات الغير مطلقة . والمعاملات  $z_j$  يمكن أن تكون مقادير ثابتة أو دوال المتغير آخر .

ويمكن الحصول على شكل أفضل لهذه المعادلات بالتعبير عنها بشكل المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

أو  $Y = AX$  مع تعريف خاص لحاصل الضرب  $AX$  (انظر بند B.3) والمصفوفة  $A = [a_{ij}]$  تسمى مصفوفة الخواص للنظام ورتبتها أو مقياسها يعرف بالتالي:

$$d(A) \cong m \times n$$

حيث  $m$  هي عدد الصفوف بينما  $n$  هي عدد الأعمدة.

## B2 أنواع المصفوفات

مصفوفة الصف: تسمى بهذا الاسم المصفوفة التي لها أي عدد من الأعمدة ولكنها صف واحد.

مصفوفة العمود: وتسمى بهذا الاسم المصفوفة التي لها أى عدد من الصفوف ولكنها عمود واحد  $d(A) = m \times 1$  وتسمى أيضاً متجه العمود.

المصنوفة القطرية: وهي التي تكون جميع حدودها القطرية لها قيمة غير صفرية.

مصفوفة الوحدة : هي مصفوفة قطرية فيها عناصر كل قطر هو الوحدة .

المصفوفة الصفيرية : وهي التي بها جميع العناصر صفرا .

المصفوفة المربعة: وهى التى بها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة.  $d(A) = n \times n$

المصفوفة المتماثلة: وهى تكون على شكل

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad d(A) = m \times n$$

ومعكوس المصفوفة  $A$  هو:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad d(A^T) = n \times m$$

حيث سنعرف المصفوفة  $A$  هى أعمدة المصفوفة  $A^T$  والعكس بالعكس. والمصفوفة  $A$  تكون

متماثلة إذا كان  $A = A^T$  وبالتالي فإن المصفوفة المتماثلة يجب أن تكون مربعة.

مصفوفة هيرميشان وتعنى بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

والمرافق للمصفوفة  $A$  هو:

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* & \dots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & a_{m3}^* & \dots & a_{mn}^* \end{bmatrix}$$

المصفوفة  $A$  تكون هيرميشان إذا كان  $A = (A^*)^T$  أى أن مصفوفة هيرميشان هى مصفوفة مربعة

ذات عناصر حقيقية فى القطر الرئيسى وعناصر مركبة مترافقة تشمل الأماكن المتقابلة لصورة مرآة بالنسبة للقطر الرئيسى نلاحظ أن  $(A^*)^T = (A^T)^*$ .

المصفوفة الغير فردية: المصفوفة المربعة  $n \times n$  ليست فردية (أو قابلة للتحويل) إذا وجدت

مصفوفة مربعة أخرى  $n \times n$  حيث أن:

$$AB = BA = I$$

بحيث  $I$  هى مصفوفة الوحدة  $n \times n$  وتسمى المصفوفة  $B$  مقلوب المصفوفة  $A$  غير فردية ونكتب  $B$

$A^{-1} =$  وإذا كانت  $A$  غير فردي فإن معادلة المصفوفة  $Y = AX$  فى بند  $B$  لها لكل قيمة للمصفوفة  $Y$

الحل الوحيد.

$$X = A^{-1}Y$$

### B3 حسابات المصفوفات

جمع وطرح المصفوفات :

المصفوفتان اللتان لهما نفس الرتبة تكونان قابلتين للجمع أو الطرح والمصفوفتان التي لهما رتبتين مختلفتين لا يمكن جمعهما .

مجموع (أو طرح) مصفوفتين  $m \times n$  :  $A = [a_{ij}]$  ،  $B = [b_{ij}]$  هي المصفوفة  $m \times n$  التي فيها كل عنصر هو مجموع (أو طرح) العنصرين المتناظرين في كل من  $A$  ،  $B$  وبالتالي فإن  $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$

مثال 1 : إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{فإن}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

معكوس جمع (أو طرح) مصفوفتان هو جمع (أو طرح) المصفوفتان المعكوستان .

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

ضرب المصفوفات

حاصل ضرب  $AB$  بهذا الترتيب للمصفوفة  $A$   $m \times n$  والمصفوفة  $B$   $n \times l$  هي المصفوفة  $C$   $m \times l$  :

$$C = [c_{ij}] : \quad c_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}] = \left[ \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right]$$

لاحظ أن كل عنصر في مصفوفة الصف تضرب في العنصر المناظر في مصفوفة العمود ثم يجمع حاصل الضرب وغالبا تعرف  $C$  بالقيمة الحسابية  $C_{ij}$  وتعامل معها كرقم عادي من بين الأرقام التي تشملها عناصر  $B$  ،  $A$  .

وضرب  $AB$  بهذا الترتيب  $m \times s$  للمصفوفة  $A = [a_{ij}]$  والمصفوفة  $B = [b_{ij}]$   $s \times n$  هي المصفوفة  $C = [c_{ij}]$  :  $m \times n$  بحيث :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

مثال B2 :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_1 + 5I_2 - 8I_3 \\ 2I_1 + I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(8) + (-3)(7) & 5(-2) + (-3)(0) & 5(6) + (-3)(9) \\ 4(8) + 2(7) & 4(-2) + 2(0) & 4(6) + 2(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A قابلة للضرب مع المصفوفة B أى أن حاصل الضرب AB متواجد فقط حينما يكون عدد أعمدة A مساوياً لعدد صفوف B وبالتالي فإنه إذا كان A مصفوفة  $3 \times 2$  ، B مصفوفة  $2 \times 5$  فإنه يمكن عمل الضرب AB ولكن حاصل الضرب BA غير جائز وإذا كانت كلا من A ، D مصفوفتان  $3 \times 3$  فإن كلا الضربين DE ، ED جائز ومع هذا فإنه ليس ضرورياً أن يكون صحيح بأن  $ED = DE$  .

ومعكوس حاصل ضرب مصفوفتان هو حاصل ضرب معكوسيهما بعد عكس الترتيب .

$$(AB)^T = B^T A^T$$

إذا كانت AB مصفوفتان غير منفردتان ولهما نفس المقياس فإن AB تكون أيضاً غير منفردة مع

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

ضرب المصفوفة فى عدد حسابى

يعرف ضرب المصفوفة  $A = [a_{ij}]$  بعدد حسابى k يعرف بالتالى :

$$kA = A_k = [ka_{ij}]$$

أى أن كل عنصر فى A تضرب فى k ولاحظ الخواص

$$k(A + B) = kA + kB \quad k(AB) = (kA)B = A(kB) \quad (kA)^T = kA^T$$

#### B4 محدود المصفوفة المربعة

ملحق بكل مصفوفة  $n \times n$  :  $A = [a_{ij}]$  دالة حسابية معينة لعناصر  $a_{ij}$  تسمى محدد A وهذا الرقم

يعرف بالتالى :

$$\det A \quad \text{or} \quad |A| \quad \text{or} \quad \Delta_A \quad \text{or} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

بحيث يوضح الشكل الأخير عناصر المصفوفة A والتى منها تتحدد قيمته وللمحددات ذات

الرتبة  $m = 1$  ،  $m = 2$  وتوضيحا لذلك :

$$|a_{11}| = a_{11} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



واستخدام هذه التعبيرات لقيم  $n$  الكبيرة يحتاج لجهد شاق وفي الغالب ما نتجنبها باستخدام نظرية مفكوك لابلاس (انظر فيما بعد) ومن المهم هنا أن نعرف بأن تعريف المحدد يكون بحيث :

$$\det AB = (\det A)(\det B)$$

لأي محددين  $AB$   $n \times n$  فإنه يوجد خاصيتين أساسيتين هما :

$$\det A^T = \det A \quad \det kA = k^n \det A$$

وأخيراً فإن  $\det A \neq 0$  (المحدد  $A$ ) إذا وفقط إذا كانت  $A$  ليست متفردة .

مثال B3 : حقق قاعدة ضرب المحددات لما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix}$$

لدينا

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{bmatrix}$$

$$\text{and} \quad \begin{vmatrix} 2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{vmatrix} = 2(27+2\pi) - (9+4\pi)(-4) = 90 + 20\pi$$

$$\text{But} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - 4(3) = -10$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{vmatrix} = -2(\pi) - 9(1) = -9 - 2\pi$$

$$\text{وحقيقة } 90 + 20\pi = (-10)(-9 - 2\pi)$$

نظرية مفكوك لابلاس

المحدد الأصغر  $M_{ij}$  للعناصر  $a_{ij}$  للمحدد ذو الرتبة  $n$  هو المحدد ذو الرتبة  $n-1$  والتي حصلنا عليها

من حذف الصف والعمود المحتوي على  $a_{ij}$  . والعامل المساعد  $\Delta_{ij}$  يعرف بالتالي :

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

وتقرر نظرية لابلاس أن :

في المحدد للمصفوفة المربعة  $A$  اضرب كل عنصر في الصف  $p$  (والعمود) بالعامل المساعد

للعنصر المناظر في الصف  $q$  (والعمود) واجمع حاصل ضرب فيكون الناتج 0 عند  $p \neq q$  ويكون

مساوياً للمحدد  $A$  عند  $p = q$  .

ويستج عن ذلك مباشرة من نظرية لابلاس أنه إذا كان  $A$  له صفين أو عمودين متطابقان فإن المحدد

$$A = 0 \quad (\text{ويجب أن يكون } A \text{ مصفوفة وحيدة}).$$

عكس المصفوفات بالمحددات

قاعدة كرامر :

يمكن بيان نظرية مفكوك لابلاس بحاصل ضرب المصفوفات كالتالي :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

or

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I$$

حيث  $A = [\Delta_{ij}]$  وهو معكوس المصفوفة للعوامل المساعدة للمصفوفة  $\Delta_{ij}$  في محدد  $A$ ،  $I$  هي مصفوفة الوحدة  $n \times n$ .

وإذا كانت  $A$  ليست فردية فإنه يمكن إجراء القسمة بالمحدد  $A \neq 0$  ونستدل أن:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

وهذا يعني أن الحل الوحيد للنظام الخطي  $Y = AX$  هو:

$$X = \left( \frac{1}{\det A} \text{adj } A \right) Y$$

وهو قانسون كرامر في شكل المصفوفة. ونحصل على الشكل العام للمحدد بأخذ الصف  $r$  من المصفوفة. وحيث أن الصف  $r$  للمحدد  $\text{adj } A$  هو:

$$[\Delta_{1r} \ \Delta_{2r} \ \Delta_{3r} \ \dots \ \Delta_{nr}]$$

فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned}
x_r &= \left( \frac{1}{\det A} \right) [\Delta_{1r} \ \Delta_{2r} \ \Delta_{3r} \ \dots \ \Delta_{nr}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= \left( \frac{1}{\det A} \right) (y_1 \Delta_{1r} + y_2 \Delta_{2r} + y_3 \Delta_{3r} + \dots + y_n \Delta_{nr}) \\
&= \left( \frac{1}{\det A} \right) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(r-1)} & y_1 & a_{1(r+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(r-1)} & y_2 & a_{2(r+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(r-1)} & y_n & a_{n(r+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

يمكن تحقيق المتساوية الأخيرة باستخدام نظرية لابلاس للعمود  $r$  للمحدد المعطى.

## BS القيم الجذرية للمصفوفة المربعة

لنظام الخطى  $Y = AX$  بالمصفوفة  $n \times n$  فإنه من المهم البحث عن «الإثارات»  $X$  التى يتج عنها «التجاوب» المتناظر  $Y$  وبالتالى ضع  $Y = \lambda X$  حيث  $\lambda$  عدد حىائى .

$$\lambda X = AX \quad \text{or} \quad (\lambda I - A)X = 0$$

بحيث  $0$  هى مصفوفة صفرية  $n \times 1$  والآن إذا كانت المصفوفة  $A - \lambda I$  ليست وحيدة فإن الحل  $X = Y = 0$  سيتج . وبالتالى فإنه للحصول على الحل الهام فإن قيمة  $\lambda$  يجب أن تكون بحيث تجعل  $A - \lambda I$  مصفوفة وحيدة أى أنه يجب أن يكون لدينا :

$$\det (\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

والحدود  $n$  لمعادلة المتعددة الحدود التى تشتمل على  $\lambda$  هى القيم الجذرية للمصفوفة  $A$  والحلول الهامة المناظرة  $X$  تعرف بالمتجهات الجذرية للمصفوفة  $A$  وبوضع  $\lambda = 0$  فى الطرف الأيسر من معادلة الخصائص السابقة نجد أن الحد الثابت  $a$  فى المعادلة يجب أن يكون :

$$\det (-A) = \det [(-1)A] = (-1)^n (\det A)$$

وحيث أن معامل  $\lambda^n$  فى المعادلة هو الوحدة الوحيدة فإن الحد الثابت سيكون أيضاً  $(-1)^n$  مكررة فى ضرب جميع الجذور وبذلك فإن محدد المصفوفة المربعة هو حاصل ضرب جميع القيم الجذرية بالتابع وهو تعريف مفيد فى المحددات .

## B4 محدود المصفوفة المربعة

ملحق بكل مصفوفة  $n \times n$  :  $A = [a_{ij}]$  دالة حسابية معينة لعناصر  $a_{ij}$  تسمى محدد  $A$  وهذا الرقم يعرف بالتالي :

$$\det A \quad \text{or} \quad |A| \quad \text{or} \quad \Delta_A \quad \text{or} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

بحيث يوضح الشكل الأخير عناصر المصفوفة  $A$  والتي منها تتحدد قيمته وللمحددات ذات الرتبة  $m = 1$  ،  $m = 2$  وتوضيحا لذلك :

$$|a_{11}| = a_{11} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

واستخدام هذه التعبيرات لقيم  $n$  الكبيرة يحتاج لجهد شاق وفي الغالب ما نتجنبها باستخدام نظرية مفكوك لابلاس (انظر فيما بعد) ومن المهم هنا أن نعرف بأن تعريف المحدد يكون بحيث :

$$\det AB = (\det A)(\det B)$$

لأي محددين  $n \times n$  فإنه يوجد خاصيتين أساسيتين هما :

$$\det A^T = \det A \quad \det kA = k^n \det A$$

وأخيراً فإن  $\det A \neq 0$  (المحدد  $A$ ) إذا وفقط إذا كانت  $A$  ليست منفردة .

**مثال B3 :** حقق قاعدة ضرب المحددات لما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix}$$

لدينا

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 + 4\pi \\ -4 & 27 + 2\pi \end{bmatrix}$$

$$\text{and} \quad \begin{vmatrix} 2 & 9 + 4\pi \\ -4 & 27 + 2\pi \end{vmatrix} = 2(27 + 2\pi) - (9 + 4\pi)(-4) = 90 + 20\pi$$

$$\text{But} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - 4(3) = -10$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{vmatrix} = -2(\pi) - 9(1) = -9 - 2\pi$$

$$90 + 20\pi = (-10)(-9 - 2\pi) \quad \text{وحقيقة}$$

## ملحق C

### أمثلة توضيحية من معلم شاوم الالكتروني

لهذا الكتاب كتاب آخر رفيق له يسمى معلم شاوم الالكتروني والذي يستخدم طريقة مائكاد التجارية ومصمم لمساعدتك لتعلم المادة العلمية بطريقة مباشرة . ويستخدم المعلم الالكتروني بيئة الرياضة الحية |LIVE-MATH| في تكنولوجيا حساب برامج الحاسب ليوضح لك على الشاشة ما يقرب من مائة مسألة محلولة من هذا الكتاب بالإضافة إلى ملخص لطريقة التعامل مع النقاط النظرية وما يناظرها الكترونيا وما يتعلق بها . وفي الصفحات التالية إعادة صياغة عينات توضيحية مرئية من المعلم الالكتروني لتساعدك في فهم الإمكانيات الكبيرة لهذه الأداة الالكترونية التعليمية . وقارن هذه الشاشات المرئية المرافقة بالمسائل المحلولة من هذا الكتاب (أرقام الصفحات المناظرة مذكورة عند بداية كل مسألة) لترى أن كلاهما مكمل للآخر . وكيف أن ذلك مفيد جداً .

وفي معلم شاوم الالكتروني ستجد كل المادة العلمية والأشكال والمعادلات لكل مسألة محلولة بالإضافة لما يبدو في شاشة الحاسب . وكما ستري في الصفحات التالية فإن كل الرياضيات ستبدو في شكل مألوف شاملة الوحدات . واختلاف الصور الرياضية والتي تلاحظها بين نشرة شاوم المطبوعة والمعلم الالكتروني مصممة لحث انتباهك للمادة العلمية أو لبيان الطرق المختلفة لحل المسائل الصعبة .

ويقراء تلك للصفحات التالية تذكر أن كل رقم أو علامة أو شكل سيكون لها التأثير الكبير حينما تراها على شاشة الحاسب . ويمكنك تغيير بيانات البداية لمسألة وستلاحظ أشكالاً جديدة للخروج تحسب أمام عينيك كما يمكنك تغيير أي معادلة وفي الحال ستري التأثير على الحسابات الرقمية على الحل . فكل معادلة أو شكل أو رقم تراه قابل للاختبار وكل مسألة محلولة موجودة تصبح ورقة عمل حية يمكنك تعديلها لحل عشرات المسائل المشابهة . والمعلم الالكتروني المصاحب لهذا الكتاب سيساعدك في تعلم واسترجاع المادة العلمية التي درست في هذا الكتاب كما يمكنك استعماله كأداة تشغيل لحل المسائل وعلامة ماسكاد المبينة على اليسار

مطبوعة خلال هذا البيان لتبين المسائل الموجودة في المعلم الالكتروني .

وللحصول على معلومات إضافية عن المعلم الالكتروني المرافق بما في ذلك متطلبات النظام انظر من فضلك إلى غلاف الكتاب الخلفي .

متوسط القدرة والطاقة :

(الدوائر الكهربائية لشاوم، الطبعة الثالثة ، المسألة للحلولة 3-1 ص 4-5)

البيان : تحمل الدائرة الحظية التيار  $i(t, \omega)$  حيث  $\omega$  هي تردد الزاوية - يوجد فرق جهد على طرفي العنصر  $v(\omega, t)$  . أوجد الطاقة  $W_T$  المنقولة في فترة واحدة للدالة الجيبية ومتوسط القدرة  $P_{avg}$  .

مكونات النظام :

$$mA = 10^{-3} \cdot amp$$

$$mW = 10^{-3} \cdot watt$$

$$Hz \equiv \frac{1}{sec}$$

قيم التيار والجهد .

$$I_0 = 2.5 \cdot mA$$

$$V_0 = 45 \cdot volt$$

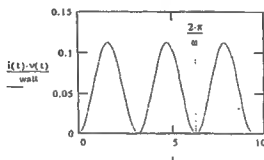
نفترض أن التردد  $\omega = 1 \text{ Hz}$

$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$v(t) = V_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

الحل : يتكون تغير كلا من التيار والجهد طبقا للموجة الجيبية المعروفة من خلال الزمن . حينما تضربان في بعضهما (القدرة =  $v \cdot i$ ) فإن تغيرهما بالنسبة للزمن يبدو هكذا :

$$t = 0 \cdot sec, \frac{1}{\omega}, 3 \cdot \frac{\pi}{\omega}$$



الطاقة هي المساحة أسفل المنحنى أو التكامل خلال دورة واحدة للقدرة اللحظية  $v \cdot i$  .

$$W_T = \int_{0 \cdot sec}^{2 \cdot \frac{\pi}{\omega}} v(t) \cdot i(t) dt$$

$$W_T = 0.353 \cdot joule$$

القدرة اللحظية هي بالتالي الطاقة مقسومة على زمن دورة واحدة .

$$P_{avg} = \frac{W_T}{2 \cdot \frac{\pi}{\omega}}$$

$$P_{avg} = 56.25 \cdot mW$$

حاول تغيير قيمة التردد ولاحظ أن الطاقة في دورة واحدة تتغير (والدورات الأقصر تحتوي على قدرة أقل) ولكن هذه القدرة  $P_{avg}$  لا تعتمد على  $\omega$  وهى بالتالى ثابتة وتتوقف القدرة المتوسطة على قيم الموجات الجيبية كالتالى :

$$P_{avg} = \frac{V_{0.10}^2}{2}$$

$$P_{avg} = 56.25 \text{ mW}$$

حاول حل التكامل جبريا لتأكد من الصحة .

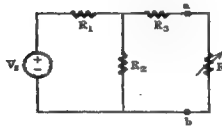
### نظرية القدرة العظمى المنقولة :

(الدوائر الكهربية لشاوم ، الطبعة الثالثة ، المسألة المحلولة 4-16 ، ص 52)

البيان : أوجد المقاومة المتغيرة  $R$  والى تتج من أكبر قدرة منقولة على الطرفين  $a$  ،  $b$  للدائرة المبينة فيما بعد .

(حينما تكون المقاومة قابلة للتغيير فإنها تسمى مجزئى جهد).

مكونات النظام



$$\Omega \sim \text{ohm}$$

$$V_s = 100 \text{ volt}$$

$$R_1 = 10 \cdot \Omega$$

$$R_2 = 15 \cdot \Omega$$

$$R_3 = 5 \cdot \Omega$$

الحل : نحصل أولاً على مكافئ ثنتين للدائرة باستبعاد المقاومة المتغيرة  $R$  واتبع نفس نظام الحل المبين فى المسألة 4-6 . ومكافئ ثنتين (للدائرة المفتوحة) للجهد هو :

$$V' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_s$$

$$V' = 60 \cdot \text{volt}$$

مقاومة ثنتين المكافئة

$$R' = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R' = 11 \cdot \text{ohm}$$

باستخدام نظرية القدرة العظمى المنقولة فى الفصل 4 فإن أكبر قدرة منقولة تحدث عند  $R = R'$  وبالتالى فإن أكبر قدرة منقولة هى :

$$P_{max} = \frac{V'^2}{4 \cdot R'}$$

$$P_{max} = 81.818 \cdot \text{watt}$$

لتبنتن بهذا العمل حاول إيجاد القدرة المفقودة في المقاومة  $R$  باستخدام طرق تبسيط الشبكة المعروفة كما هو مبين في المسألة 4-7 وستصل إلى تعبير القدرة التالي :

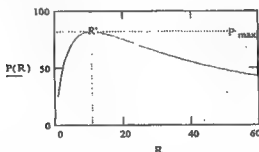
$$P(R) = \frac{\left[ \frac{V_s R_2 R}{R_1 (R + R_3 + R_2) + R_2 R + R_2 R_3} \right]^2}{R}$$

لتبنتن بهذا العمل حاول إيجاد القدرة المفقودة في المقاومة  $R$  باستخدام طرق تبسيط الشبكة المعروفة كما هو مبين في المسألة 4-7 وستصل إلى تعبير القدرة التالي :

$$P(R) = \frac{\left[ \frac{V_s R_2 R}{R_1 (R + R_3 + R_2) + R_2 R + R_2 R_3} \right]^2}{R}$$

ارسم هذا التعبير مع قيم مختلفة للمقاومة  $R$  وتبين أن القيمة العظمى هي :

$$R = 10 \Omega \dots 60 \Omega$$



والآن تبين لك فائدة نظرية القدرة العظمى المنقولة ويمكن استخدام تبسيط الشبكة للحصول على هذه القيمة العظمى باستخدام التفاضل ولكن هذه الطريقة تستغرق وقتاً طويلاً بالنسبة للطريقة البسيطة باستخدام مكافئ ثنين .

ملاحظة للمؤلف: المكتوب بخط ثقيل والمكتوب تحته خط في هذه المسألة يبين نوعاً مختاراً من المسائل وإذا كنت تعمل بالحاسب فإن الضغط مرتان على هذه الأجزاء بالفأرة سيعود بك إلى الملف الخاص بهذه المادة .

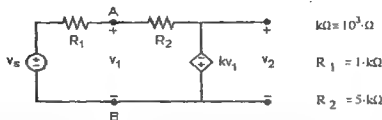
التغذية الخلفية في دائرة المكبر المثالي :

(الدوائر الكهربائية لشاوم ، الطبعة الثالثة ، مثال 4-5 ص 60)



البيان: (أ) أوجد  $V_2/V_S$  كدالة في كسب الدائرة المفتوحة  $k$ . (ب) احسب  $V_2/V_S$  عند 1000 ،  $k = 100$  وناقش النتائج.

مكونات النظام :



الحل : المكبر المثالي هو جزء من الدائرة على يمين العقدتين A و B في الشكل مع مقاومة التغذية الخلفية  $R_2$  بدلا من الدائرة المفتوحة وأضيفت مقاومة التغذية الخلفية للتحكم في الكسب الكلي للمكبر وحيث :

$$v_2 = k \cdot v_1 \quad \text{or} \quad v_1 = \frac{-v_2}{k}$$

استخدم KCL عند العقدة A لتعطي :

$$\frac{v_1 - v_S}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \left( \frac{-v_2}{k} - v_S \right) \left( \frac{-v_2}{k} - v_2 \right) / R_2 = 0$$

باستخدام منظم العمليات الرمزي ماتكاد يمكن لنا الحل لإيجاد  $V_2$  (يمكن الاستغناء عن هذا الجزء إذا كنت مستخدما ماتكاد) للحصول على معلومات أكثر عن طريقة استخدام منظم العمليات الرمزي انظر معلم ماتكاد.

$$v_2 = v_S \cdot \frac{-R_2 \cdot k}{(R_2 + R_1 - R_1 \cdot k)} \quad \frac{v_2}{v_S} = \frac{R_2 \cdot k}{(R_2 + R_1 + R_1 \cdot k)}$$

وبحدود النسب

$$h = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{in this case} \quad h = 0.167$$

يمكن كتابة الكسب  $V_2/V_S$

$$G_{neg} = \frac{v_2}{v_S} \quad (\text{كلمة neg تمثل كسبا معكوسا})$$

$$G_{neg}(k) = (1 - b) \cdot \frac{-k}{1 + b \cdot k}$$

(ب) للقيم المعطاه للثابت  $k$  فإن المكاسب تكون :

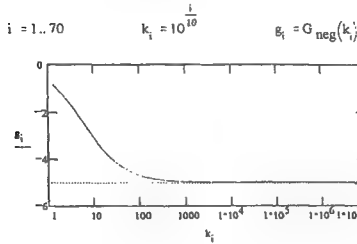
$$k_1 = 100 \quad G_{neg}(k_1) = -4.717$$

$$k_2 = 1000 \quad G_{neg}(k_2) = -4.97$$

وبذلك عند زيادة  $k$  لعشرة أمثالها ينشأ تغيير طفيف في الكسب  $V_2/V_s$

$$\frac{G_{neg}(k_2) - G_{neg}(k_1)}{G_{neg}(k_1)} = 5.368\%$$

ودعنا نبين ذلك بوضوح أكثر بدراسة  $V_2/V_s$  بالرسم في  $k$



وشيء واحد يجب ملاحظته أنه للقيم الكبيرة للثابت  $k$  فإن  $V_2/V_s$  تقترب من  $-R_2/R_1$

$$G_{neg}(\infty) = -5$$

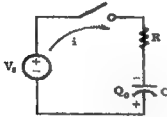
وبذلك فإنه مع التغذية الخلفية طالما أن  $k$  ليست صغيرة جداً فإن الكسب الكلي لا يتوقف على تغيرات  $k$ .

تكوين الجهد المستمر علي طرفي المكثف :

(الدوائر الكهربائية لشاوم ، الطبعة الثالثة ، المسألة للحلولة 7-7 ص 144) .

البيان : أقفل المفتاح في الدائرة المبينة فيما يلي عند الزمن  $t = 0$  وفي هذه اللحظة كان على المكثف الشحنة  $Q_0$  بالإشارات المبينة . أوجد  $i$  ،  $q$  عند  $t > 0$  وارسم شكلاً للقيمة  $q$  .

مكونات الدائرة :



$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$V_s = 50 \text{ volt}$$

$$C = 20 \text{ }\mu\text{F}$$

$$Q_0 = 500 \text{ }\mu\text{C}$$

$$\text{k}\Omega = 10^3 \text{ ohm}$$

$$\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ farad}$$

$$\mu\text{C} = 10^{-6} \text{ coul}$$

$$\text{ms} = 10^{-3} \text{ sec}$$

$$\text{mA} = 10^{-3} \text{ amp}$$

الحل : نعلم أنه عند  $t > 0$  فإن العلاقة بين  $i$  ،  $C$  ،  $v$  (وهو الجهد على  $C$ ) هو :

$$i = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

عند  $t > 0$  فإن KVL حول الحلقة يعطى :

$$V_s = R \cdot i + v(t) = R \cdot C \cdot \frac{dv}{dt} + v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R \cdot C} = \frac{V_s}{R \cdot C}$$

مع أخذ الحالة الابتدائية على  $v_C$  فإن

$$v(0 \text{ ms}) = \frac{-Q_0}{C}$$

(الإشارة السالبة تعني أن القطبية المبينة في عكس إتجاه التيار)

الحل الخاص (أو القصرى) يحقق المعادلة التفاضلية ولكن ليس الحالة الابتدائية .

$$v_p(t) = V_s$$

وهذا الحل الخاص صحيحاً لأنه عند  $t = \infty$  سيكون التيار صفراً وبالتالي لن يكون هناك انخفاض في الجهد على طرفي R . والحل المتجانس (أو التجاوب الطبيعي) .

$$v_h(t) = A \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right)$$

يمكن إضافته . ويمكن ضبط قيمة A بحيث يكون الحل الكلي  $v_p + v_h$  تحقق كلا المعادلتين :

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) = V_s + A \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right)$$

ومن الحالة الابتدائية نصل إلى قيمة A .

$$v(0\text{-ms}) = \frac{-Q_0}{C} = V_s + A$$

$$\frac{-Q_0}{C} = -25 \text{ volt}$$

$$A = \frac{-Q_0}{C} - V_s$$

وبالتالي

$$v(t) = \left(\frac{-Q_0}{C} - V_s\right) \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right) + V_s$$

والتي منها

$$q(t) := C \cdot v(t) \quad \text{and} \quad i(t) := \frac{d}{dt} q(t)$$

رسمنا أشكال  $q(t)$  ،  $i(t)$  ،  $v(t)$  فيما يلي لإيجاد فترة تكون  $q = 0$  (حيث يقطع المنحنى محور X) . استخدم دالة الجذر المشروحة في معلم مائكاد .

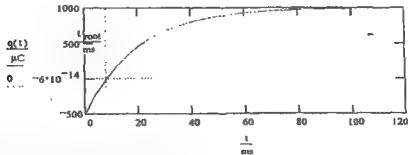
ضمن

$$t_{\text{root}} = 5 \cdot \text{ms}$$

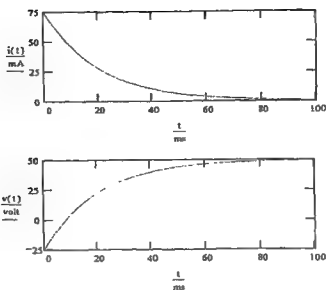
$$t_{\text{root}} = \text{root}(v(t_{\text{root}}), t_{\text{root}})$$

$$t_{\text{root}} = 8.109 \cdot \text{ms}$$

$$t = 0 \cdot \text{sec} \cdot 2 \cdot R \cdot C \dots 5 \cdot R \cdot C$$



المنحنى السابق يبين أن الشحنة تتغير من القيمة الابتدائية لها إلى الشحنة المحددة بجهد المنبع المتصل عند  $t = 0$  وحيث أن هاتين الشحنتين لهما قطبية متضادة فإن المنحنى يمر بالصفر كما هو مبين في الشكل .

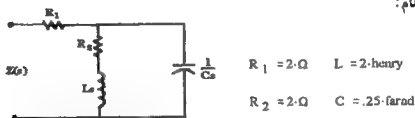


الممانعة المتوقفة علي التردد :

(الدوائر الكهربائية لشاوم ، الطبعة الثالثة ، المسألة المحلولة 8-11 ص 175)

البيان : أوجد الممانعة  $Z_{in}(s)$  للدائرة المبينة فيما بعد في المجال  $0 < s < \infty$  ارسم القيمة والزاوية على مقياس لوفغارتي .

مكونات النظام:



الحل: باستخدام طريقة التبسيط القياسية للشبكة . أوجد الممانعة المكافئة لهذه الدائرة .

$$Z_{in}(s) = \left[ R_1 + \frac{(R_2 + Ls) \cdot \left( \frac{1}{Cs} \right)}{(R_2 + Ls) + \frac{1}{Cs}} \right]$$

$$Z_{in}(s) = \frac{(R_1 \cdot R_2 \cdot C \cdot s + R_1 \cdot L \cdot s^2 \cdot C + R_1 + R_2 + Ls)}{(R_2 \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1)}$$

استخدم منظم العمليات الرمزى لتبسيط هذه العلاقة (إذا كنت مستخدماً ماكينة ماثكاد فلست في حاجة لذلك).

$$Z_{in}(s) = \frac{[R_1 \cdot L \cdot s^2 \cdot C + (R_1 \cdot R_2 \cdot C + L) \cdot s + R_1 + R_2]}{(R_2 \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1)}$$

إقسم كلا من البسط والمقام على LC.

$$Z_{in}(s) = \frac{\left(R_1 \cdot s^2 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C} \cdot s + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C}\right)}{\left(s^2 + \frac{R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C}\right)}$$

$$Z_{in}\left(0 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right) = 4 \cdot \Omega \quad \text{عند } s = 0 \quad (1)$$

وهي الممانعة المتوقفة مع منبع التيار المستمر الثابت: فيكون المكثف كدائرة مفتوحة والملف كدائرة مقصورة كما هو مبين في الفصل 7 وتبقى فقط المقاومتان على التوالي.

(ب) عند  $s = j4 \text{ rad/sec}$

$$Z_{in}\left(j \cdot 4 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right) = 2.038 - 1.132j \cdot \text{ohm}$$

ولدواعي استعمال المتجهات:

$$\left|Z_{in}\left(j \cdot 4 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)\right| = 2.331 \cdot \text{ohm} \quad \arg\left(Z_{in}\left(j \cdot 4 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)\right) = -29.055 \cdot \text{deg}$$

وهذه هي الممانعة المتدفقة للمنبع  $\sin(4t)$  أو  $\cos(4t)$ .

(ج) بالنظر في الدائرة  $Z_{in}(\infty) = 2 \Omega$  ولكي نرى ذلك انقسم كل حد في علاقة الممانعة بالقيمة  $s^2$ . الحدود التي بها  $s$ ،  $s^2$  في المقام ستكون صفراً في النهاية وكل ما يبقى هو  $R_1$ .

$$Z_{in}(s) = \frac{\left(R_1 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C \cdot s} + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C \cdot s^2}\right)}{\left(1 + \frac{R_2}{L \cdot s} + \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2}\right)} \quad R_1 = 2 \cdot \Omega$$

ويستطيع أيضاً منظم العمليات الرمزى الوصول للقيمة  $Z_{in}$  حينما  $s$  تقترب من  $\infty$  (إذا كنت مستخدماً ماكنته ماثكاد فلست في حاجة لذلك).

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left(R_1 \cdot s^2 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C} \cdot s + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C}\right)}{\left(s^2 + \frac{R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C}\right)} \quad \text{yields} \quad R_1$$

عند الترددات العالية جدا يبدو أن المكثف كما لو كان دائرة قصيرة على طرفى فرع RL كما نوقش فى الفصل 12.

دعنا نقوم بدراسة صغيرة على مدى توقف الممانعة وزاوية الوجه على التردد وللحصول على مدى واسع لتغير  $s$  فإن استخدام المقياس اللوغارىفى الذي يجعل المسافات متساوية لضروب 10.

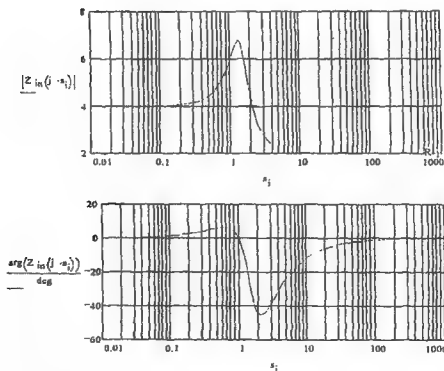
$$s_{\text{low}} = .01 \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{أقل قيمة فى الرسم}$$

$$s_{\text{high}} = 100 \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{أكبر قيمة فى الرسم}$$

$$N = 100 \quad i = 0, N - 1 \quad \text{عدد النقط}$$

$$r = \log \left( \frac{s_{\text{low}}}{s_{\text{high}}} \right) \frac{1}{N} \quad r = -0.04 \quad \text{حجم الخطوة}$$

$$s_i = s_{\text{high}} 10^{ir} \quad \text{متغير المدى}$$



من الملاحظ أن تصرف الدائرة يتغير من حالة لأخرى وتصل الممانعة إلى قيمتها العظمى عند تردد الرنين وإضافة أكثر فى مادة تجاوب التردد والرنين سيأتى فى الفصل 12.

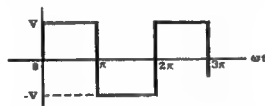
ملاحظة المؤلف : لاحظ أنه يمكن إدخال الأعداد المتجهة أو التخيلية في ماثكاد إما بالشكل الأسى Aciphaso وبالإحداثيات . وحينما يحسب الحاسب إجابة تخيلية فسيؤديها بالشكل الإحداثي ولكن يمكن استخراج القيمة والزاوية بسهولة كما هو مبين سابقا باستخدام المعاملات 11 ، arg للقيمة الحسابية والزاوية بالترتيب ولاحظ أيضا أنه تم التعامل أتوماتيكيا مع عكس المصفوفة ولذلك فإن المحددات والمحددات الفرعية المستخدمة في النسخة المعدلة لشاوم ليست مطلوبة .

### متوالية فوريير للموجة المربعة :

(الدوائر الكهربائية لشاوم ، الطبعة الثالثة ، المسألتين للمحلولين 1-17 ، 8-17 ص 419 ، ص 424)

ليسان : (أ) أوجد متوالية فوريير المثلثية للموجة المربعة ذات الفترة T والمبينة فيما يلي وارسم خط الطيف . أعد تركيب الموجة في الزمن باستخدام معاملات فوريير . (ب) أوجد معاملات فوريير للمتوالية الأسية وقارنها بمعاملات المثلثية .

تركيب النظام :



$$T = 2\pi$$

$$V = 10\text{-volt}$$

حل : في الفترة  $0 < \omega t < \pi$   $f(t) = V$  وفي الفترة  $\pi < \omega t < 2\pi$   $f(t) = -V$  . لاحظ أن هذه الموجة تتفق مع حالات ديرشلت في الفصل 17 لأنها تحتوي على عدد محدد من عدم الاستمرارية لكل فترة . والقيمة المتوسطة للموجة صفرا ولذلك بالنظر في الموجة  $a_0/2 = 0$  ونحصل على معاملات جيب التمام بعد كتابة ناتج التكامل بالدوال المستخدمة كالتالي :

$$a_0 = 0 \text{ نظراً لأن القيمة المتوسطة صفرا}$$

$$a_0 = 0 \text{ volt since the average value is zero.}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \cos(n\omega t) d(\omega t) + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cdot \cos(n\omega t) d(\omega t) \right]$$



وبالتعويض  $u = \omega.t$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} V \cos(n \cdot u) du + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cos(n \cdot u) du \right]$$

اختار منظّم العمليات الرمزى للحمل ومن قائمة الرموز اختار العلاقة السابقة كلها ثم اختار إجراء العملية رمزياً (إذا كنت مستخدماً ماكينة ماثكاد فليست في حاجة لذلك).

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot T\right)}{n} \cdot V - \frac{\sin(n \cdot T)}{n} \cdot V \right] = 0 \text{ volt}$$

والمفروض أن تتوقع هذه النتيجة لأن الموجة فردية وبذلك تشمل متوالية فوريير على حدود الجيب فقط.

ومع موالات الحل بالتكامل لحدود الجيب.

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) d(\omega \cdot t) + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) d(\omega \cdot t) \right]$$

وبالتعويض  $u = \omega.L$

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \sin(n \cdot u) du + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cdot \sin(n \cdot u) du \right]$$

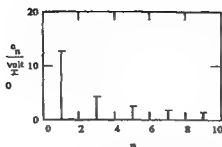
ومرة أخرى حل هذه العلاقة رمزياً وبسط الناتج:

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ -2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot T\right)}{n} \cdot V + \frac{1}{n} \cdot V + \frac{\cos(n \cdot T)}{n} \cdot V \right]$$

تعرف العشرة حدود الأولى لقيم التوافقيات بدلالة معاملات  $b_n$ .

$$n_{\max} \leq 10 \quad n = 1 \dots n_{\max} \quad c_n = \sqrt{(b_n)^2}$$

وأسقطت المعاملات  $a_n$  من هذه العلاقة لأنها جميعاً أصفاراً والآن تقوم بتجهيز رسم خط الطيف.

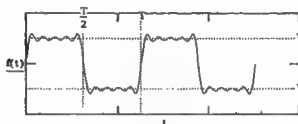


استخدم نوع الراسم "error" لنسخ خطوط الطيف ولعمل ذلك ارسم كسلا من المعاملات وخط الصفر واختار نوع الراسم "error" لكليهما . وللحصول على معلومات أخرى فى اختيار طريقة الرسم (انظر معلم مائكاد A).

تحتوى المتوالية على حدود التوافقيات الفردية للمجيب (الحدود الزوجية صفر وكما كان متوقعا بالنظر فى الموجة للتماثل). ويحتوى التماثل النصف موجى على التوافقيات الفردية. ويمكن للمتوالية أن تحتوى على حدود جيب التمام إذا تحركت نقطة الأصل للموجة ولكن ستبقى فقط الحدود الفردية للتوافقيات فى الشكل الطيفى . حاول فى ذلك لترى النتيجة .

لتفتح بنفسك أن هذه المتوالية تمثل حقيقية موجة مربعة أعد تركيب الموجة التالية :

$$f(t) = \sum_n b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad t = 0, 0.01 \cdot T, 2 \cdot T$$



يمكنك أن ترى كيف أن الشكل يبين تقريباً الموجة المربعة المطلوبة وذلك اعتماداً على الرمز n حاول تغيير قيمة  $n_{max}$  لترى كيف يتأثر شكل الموجة تحسناً أو سوءاً .

(ب) فى الفترة  $0 < \omega t < \pi$  ،  $f(t) = V$  ، فى الفترة  $-\pi < \omega t < 2\pi$  ،  $f(t) = -V$  ، والموجة فردية لذلك فإن  $A_n = 0$  ، ستكون تخيلية خالصة .

$$A_0 = 0 \text{ volt}$$

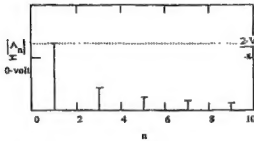
$$A_n = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 -V \cdot e^{-j \cdot n \omega t} d(\omega t) + \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot e^{-j \cdot n \omega t} d(\omega t) \right]$$

بالتمريض  $u = \omega.t$

$$A_n = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 -V \cdot e^{-j \cdot n \cdot u} du + \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot e^{-j \cdot n \cdot u} du \right]$$

والآن جهاز رسم خط الطيف .

لاحظ أن القيمة أخذت للتعبير عن حجم المعاملات وليس بالصفة المركبة .



Note that the magnitude has been taken to display the size of the coefficients rather than their complex character.

ويبين شكل الطيف قيم الترددات الموجبة فقط ويتجميع القيم عند  $+n$  ،  $-n$  يؤدي إلى نفس الشكل الطيفي المرسوم سابقاً في الجزء (أ) .

ويمكن الحصول على معاملات المتوالية المثلثية باستخدام

$$n = 0 \dots n_{\max}$$

معاملات جيب التمام هي :

$$a_n = 2 \cdot \text{Re}(A_n) \quad a^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot \text{volt}$$

وكما سبق فإن معاملات الجيب هي :

$$b'_n = -2 \cdot \text{Im}(A_n)$$

$$b'^T = (0 \ 12.732 \ 0 \ 4.244 \ 0 \ 2.546 \ 0 \ 1.819 \ 0 \ 1.415 \ 0 \ 0) \cdot \text{volt}$$

قارن مع القيم الأصلية

$$b^T = (0 \ 12.732 \ 0 \ 4.244 \ 0 \ 2.546 \ 0 \ 1.819 \ 0 \ 1.415 \ 0 \ 0) \cdot \text{volt}$$





# ELECTRIC CIRCUITS

# SCHAUM'S ouTlines

OVER 30 MILLION SOLD

لماذا تشتري كتاب

شوم؟

لأن كل كتاب يحتوي

على النظرية

الأساسية والتعريفات

ومئات من المسائل

المحلولة بعناية

وكذلك ... مسائل

غير محلولة

لمساعدة الطالب

على التفوق.

- مبادئ حساب التفاضل والتكامل

- البرمجة بلغة الباسكال

- البرمجة بلغة البيسك (عربي)

- البرمجة بلغة ++C (جزيئين) جديد

- البرمجة بالفورتران

- البرمجة بلغة الكويل

- البرمجة بلغة C الجزء الأول

- البرمجة بلغة C الجزء الثاني

- أساسيات الفورتران

- أساسيات الكويل

**الكيمياء والفيزياء**

- الكيمياء العضوية

- الكيمياء العامة

- الفيزياء الجامعية جديد

- مبادئ الفيزياء

- البصرييات جديد

**الزراعة والعلوم الحيوية**

- الوراثة

**الاقتصاد وإدارة الأعمال**

- الإحصاء والاقتصاد القياسي

- الاقتصاد الدولي

- النظرية الاقتصادية الكلية

- نظرية اقتصاديات الوحدة

- أصول المحاسبة (١)

- أصول المحاسبة (٢)

**التربية وعلم النفس**

- مقدمة في علم النفس

- ميكولوجية التعلم

**الهندسة**

- المبادئ الرقمية

- تكنولوجيا الإلكترونيات

- الدوائر الكهربائية جديد

- الماكينات الكهربائية

- نظم القوى الكهربائية

- النبائط الإلكترونية ودوائرها

- أساسيات الهندسة الكهربائية جديد

- الديناميكا الحرارية

- مقاومة المواد

- ميكانيكا الموائع والهيدروليكا

- اهتزازات ميكانيكية

- الميكانيكا الهندسية - استاتيكا

- الميكانيكا الهندسية - ديناميكا

**الرياضيات والحاسبات**

- الاحتمالات

- الإحصاء

- بحوث العمليات

- التحليل العددي

- تحليل المتجهات

- الجبر الخطي

- التفاضل والتكامل المتقدم

- حساب التفاضل والتكامل

- الدوال المركبة

- الرياضيات الأساسية للحاسب

- الرياضيات المتقدمة

- المعادلات التفاضلية جديد

- الميكانيكا العامة

- نظرية الفئة

**INTERNATIONAL HOUSE FOR  
CULTURAL INVESTMENTS**

P.O.Box 5599 Heliopolis West. Cairo/Egypt

Tel.: 2972344 - 2957655, Fax:(00202) 2957655

Bibliotheca Alexandrina

035 2235